

## Homogene Ränder

Wo in Städten größere zusammenhängende Areale auf einen Schlag geplant und bebaut wurden, verlaufen die Straßenzüge häufig in schnurgeraden Parallelen von Süd nach Nord und senkrecht dazu von West nach Ost. Ein wenig streng und kühl wirken solche Raster, doch machen sie in ausgedehnten Stadtzentren, wie in New York oder Buenos Aires, die Orientierung zu einem Kinderspiel mit Koordinaten. Auch die Ränder einiger großer Territorien sehen wie mit dem Lineal gezogen aus: bei einigen Bundesstaaten der U.S.A. etwa oder, besonders ausgeprägt, beim ägyptischen Staatsgebiet, das von Libyen und vom Sudan durch senkrecht aufeinander stehende Strecken geschieden ist (Fig. 17).



Fig. 17

Außer der Geraden gilt auch der Kreis seit alters her als eine vollkommene Form. Warum sind die meisten Münzen kreisförmig? Ihre Symmetrie wirkt gefällig, erfüllt aber auch einen praktischen Zweck: Münzen sollen gut in der Hand liegen, und ein gleichmäßiger Rand trägt dazu bei. „Gesichtskreis“ und „Wirkungskreis“ sind gebräuchliche sprachliche Metaphern; sie spielen auf ein Zentrum an, von dem aus wir uns in alle Richtungen gleich weit bewegen – getreu der klassischen Definition, derzufolge ein Kreis aus genau den Punkten (einer Ebene) besteht, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand haben.

In der rauhen Wirklichkeit der Dinge finden sich Geraden und Kreise allenfalls angenähert realisiert. Von einer Geraden, die nach beiden Seiten unbegrenzt zu denken ist, lassen sich überhaupt nur (kleine) endliche Stücke verkörpern, wie die Kante eines Lineals. Geradenstücke entstehen meist unter dem Einfluss einer dominierenden Kraft. Das gilt für die in kolonialer Willkür gesetzten Grenzen auf dem afrikanischen Kontinent ebenso wie für ein zwischen zwei Händen gespanntes Seil (Fig 18). Auch die geraden Kanten, die manchmal an naturwüchsigen Kristallen auftreten, sind im Prinzip so zu erklären (Fig.19).



Fig. 18

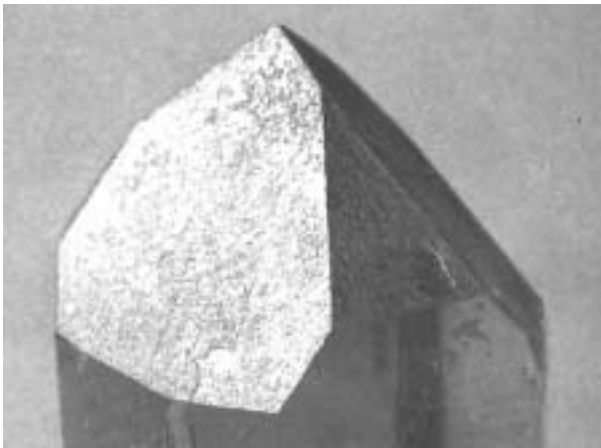


Fig. 19

Im Raum haben Gerade und Kreis naheliegende dreidimensionale Entsprechungen: Ebene bzw. Kugel. Hinzu tritt hier noch der Zylinder als ein aus Gerade und Kreis aufgebautes Zwitterwesen: Der Rand (Mantel) eines geraden unendlichen Kreiszylinders – von dem ausschließlich hier die Rede sein soll – besteht aus allen Punkten, die von einer Geraden, der Zylinderachse, gleichen Abstand haben. Der Mantel besteht somit aus sämtlichen Geraden (Mantellinien), die parallel zur Achse und in festem Abstand zu ihr verlaufen. Ein ebener Schnitt senkrecht zu den Mantellinien erzeugt einen Kreis.

Ebene, Kugel und Zylinder begegnen uns zwar in natürlichen Phänomenen, jedoch meist nur in grober Näherung. Die Oberfläche eines Sees – Windstille vorausgesetzt – scheint eine Anschauungsvorlage abzugeben, aus der sich die Idee der Ebene kraft Abstraktion gewinnen lässt. Abstrahieren bedeutet, von unwesentlichen und störenden Eigenschaften abzusehen, hier: von allen Eigenschaften, in denen die Wasseroberfläche von einer idealen Ebene abweicht. Ist das möglich, ohne nicht schon zu wissen, was eine Ebene ist? Um Abweichungen zu identifizieren, die nicht direkt wahrnehmbar sind, braucht man im allgemeinen etwas physikalische Theorie, mindestens aber eine entwickelte Geometrie, in der Grundbegriffe wie „Ebene“ oder „Gerade“ längst eingeführt sind. Dabei erweisen sich Wasseroberflächen als kugelförmig (wenn auch mit unmerklich kleiner Krümmung), denn sie sind Äquipotentialflächen im Schwerfeld der Erde. Auch hier verursacht eine dominierende Kraft das Entstehen der Form.

Das vielfache und variantenreiche Vorkommen geometrischer Grundformen in unserer Lebenswelt ist allerdings nicht kausal, sondern überwiegend final, d.h. als Ergebnis bewussten und zielgerichteten Handelns zu verstehen. Die betreffenden Objekte entstehen in technischer Praxis, durch zweck- und funktionsgerechte Formgebung. Tatsächlich verkörpern schon ein

fache Alltagsgegenstände grundlegende Ideen (Formen und Formbeziehungen) der Geometrie. Zum Beispiel finden wir Punkte, Geraden- und Ebenenstücke, rechte Winkel und Parallelen an Ziegelsteinen, Tischplatten, Wandtafeln oder an einem Blatt Papier. Beispiele für Objekte, die Eigenschaften von Kugel oder Zylinder ausnutzen, sind Bälle, Billardkugeln, Kugellager, Walzen, Räder, der Kolben im Kolbenmotor, u.a.m.

Ebene, Kugel und Zylinder weisen eine Spielart der Symmetrie auf – eine „freie Beweglichkeit im Lager“ (BENDER/SCHREIBER 1985) –, die sie mit keiner anderen Fläche teilen. Im Unterschied zur Achsensymmetrie oder der ganzzahligen Symmetrie von Bandornamenten oder Rosetten handelt es sich um eine spezielle Art von kontinuierlicher Symmetrie. Wir denken uns den betreffenden Körper so bewegt, dass er das von ihm eingenommene Raumgebiet nicht verlässt. Mit einer Kugel ist dies ohne weiteres möglich, wenn sie in beliebiger Weise um ihren Mittelpunkt gedreht wird; mit einem Würfel hingegen beansprucht die entsprechende Transformation dessen komplette Umkugel. Ebenen und Zylinder können ebenfalls frei „in sich“ bewegt werden. Entscheidend ist dabei der Zusatz „frei“; er besagt, dass sich zwei beliebige Punkte  $A, A'$  auf dem Rand des Körpers durch eine geeignete Bewegung im Lager ineinander überführen lassen. Um dies bei dem in Fig. 20 abgebildeten Zylinder(abschnitt) zu erreichen, ist eine geeignete Drehung um seine Achse sowie eine passende Verschiebung zu vollführen. Drehung und Verschiebung hat man sich dabei als eine einzige (zusammengesetzte) Symmetrietransformation vorzustellen. Beim Zylinder ist sie zu vorgegebenem Randpunktpaar eindeutig bestimmt, für Ebene und Kugel gilt das nicht.

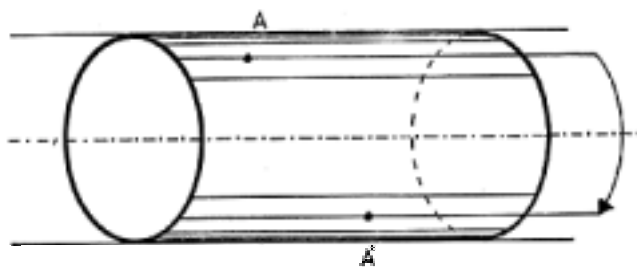


Fig. 20

Die freie Beweglichkeit im Lager dient einer Vielzahl praktischer Zwecke in Alltag und Technik. Ein Schrank soll sich an einer Wand, ein Buch auf einem Tisch ungehindert verlagern lassen. Beim Zylinder kommt bevorzugt eine Bewegungsart zum Tragen, etwa die freie Beweglichkeit in Richtung seiner Mantellinien beim Kolbenmotor. Geläufige Beispiele für die Kugel sind die Kugelschreiberspitze, die sich beim Schreiben beliebig in ihrem Lager bewegt und dabei die Minenflüssigkeit zum Papier befördert, oder das Kugelgelenk, mit dem sich eine Kamera auf ihrem Stativ, ein Rückspiegel in seiner Halterung frei justieren lassen.

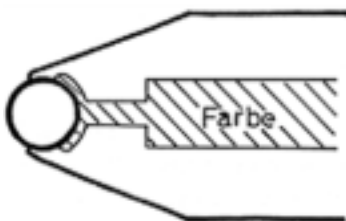


Fig. 21

Offensichtlich sind auch Geraden und Kreise in ihrem Lager frei beweglich. Eine weitere (die einzige, zudem wesentlich räumliche) Kurve, für die das ebenfalls gilt, ist die Schraubenlinie.

Sie entsteht auf dem Mantel eines Kreiszyinders, wenn man diesen gleichmäßig schräg auf einer geraden Kante abrollt (Fig. 22).

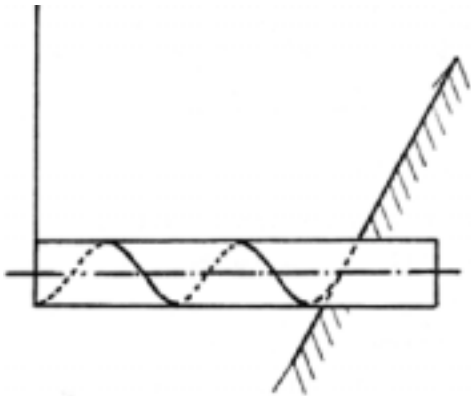


Fig. 22

Dass eine Schraubenlinie in ihrem Lager frei bewegt werden kann, erfährt jeder, der einen Korkenzieher in den Korken einer Weinflasche einschraubt (Fig. 23). Bei der Schraubbewegung wird gleichzeitig eine Rotation und eine Translation ausgeführt. Ist daher ein Korkenzieher erst einmal in einen Korken eingeschraubt, so kann er durch bloßes Ziehen (Translation) aufgrund von Reibungswiderständen, die den Korken an einer Rotation hindern, nicht wieder herausgelangen, außer eben mit diesem gemeinsam.



Fig. 23

Die freie Beweglichkeit im Lager ist ein Sonderfall kontinuierlicher Symmetrie und lässt sich daher mathematisch in der Sprache der Transformationsgruppen beschreiben. Sie lässt sich aber auch elementarer dadurch kennzeichnen, dass man – wie HUGO DINGLER in seinen Grundlagen der Geometrie (1933) – die Ununterscheidbarkeit der Stellen (Punkte) auf dem Rand des betreffenden Körpers fordert. Dieses Postulat wurde später von PAUL LORENZEN (1961) wieder aufgegriffen und als „Prinzip der Homogenität“ formuliert. Die Grundidee klingt vage schon bei Euklid an, der eine Gerade als eine Linie definiert, „die gleich liegt mit den Punkten auf ihr selbst“. Um dies allgemeiner und präziser zu fassen, denken wir uns eine Fläche  $F$  (Rand eines Körpers bzw. Raumgebiets) sowie irgendeine Aussage, in der von  $F$  und einem Punkt  $P$  auf  $F$  die Rede ist. Ändert sich dann die Gültigkeit dieser Aussage nicht, wenn  $P$  durch einen beliebigen anderen Punkt  $P'$  ersetzt wird, so heißt die betreffende Fläche  $F$  homogen (im Sinne von DINGLER/LORENZEN). Kurzum, alle Erkenntnisse, die wir mit unseren Sprachmitteln über eine Stelle auf  $F$  ausdrücken können, gelten von sämtlichen Stellen auf  $F$ . Ist nun Homogenität tatsächlich gleichbedeutend mit freier Beweglichkeit im Lager?

Zumindest lässt sich dies zeigen: Als homogene Flächen kommen einzig die Ebene, die Kugel- und die Mantel eines (unendlichen) Kreiszylinders in Frage. (Für einen Beweis unter sehr allgemeinen Voraussetzungen vgl. BENDER/SCHREIBER 1985)

Das Homogenitätsprinzip erlaubt eine experimentell-handwerkliche Deutung: Von einem Randpunkt samt einer kleinen Umgebung fertigen wir einen massiven Abdruck an, etwa in Form eines Stempelchens. Auf einem homogen berandeten Körper muss dieser Stempel an sämtlichen Stellen passen, d.h. so aufgesetzt werden können, dass alle Punkte der Stempel- fläche den Rand des Körpers berühren. Andernfalls ließen sich Randpunkte unterscheiden, wie z.B. auf einer Hühnerei, wo ein von den stärker gekrümmten Kappen genommener Abdruck an den seitlichen Stellen der Eierschale nicht vollständig aufliegt (Fig. 24).

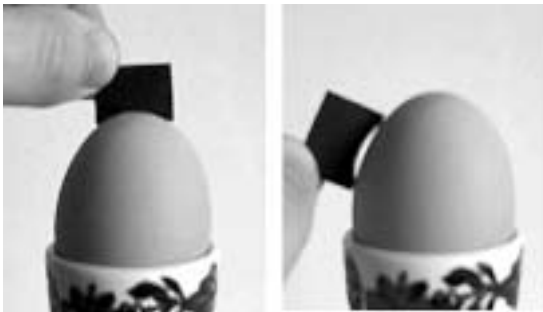


Fig. 24

Wir gehen nun einen Schritt weiter und denken uns den Abdruck so zu einer Passform vergrößert, dass der ganze Rand des betreffenden Körpers bedeckt wird. Die oben genannte Passbedingung drückt dann gerade die freie Beweglichkeit des Körpers in dem Lager aus, das von seinem Abdruck gebildet wird.

Fertigt man von einer homogenen Randfläche  $F$  – in der Praxis genügt ein endliches Stück von  $F$  – zwei (gleiche) Passformen  $F_1$  und  $F_2$ , so fällt auf: Bei einer Ebene passen  $F_1$  und  $F_2$  aufeinander, d.h.  $F_1$  ist Passform von  $F_2$  und umgekehrt. Ist  $F$  hingegen Rand(stück) einer Kugel oder eines Zylinders, so gilt dies offensichtlich nicht. Der Sachverhalt ist somit ein Charakteristikum, das die Ebene unter den homogenen Flächen auszeichnet. Auf ihm beruht ein technisches Verfahren, mit dem sich Ebenenstücke an drei grob vorgeebneten Platten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  durch wechselseitiges Schleifen realisieren lassen. Durch Schleifen kann man eine Oberfläche homogen machen. Schleift man dabei abwechselnd  $a$  an  $b$ ,  $b$  an  $c$  und dann wieder  $a$  an  $c$ , so ist am Ende jede Platte eine Passform der übrigen beiden, kann also nur eine ebene Randfläche besitzen. Der historische Ursprung der Methode ist nicht völlig sicher; im 18. und 19. Jahrhundert wurde sie aber wohl von englischen Konstrukteuren (wie H. MAUDSLAY) verwendet, um plan-konvexe Linsen und Stahlebenen höchster Präzision herzustellen.

DINGLER hielt das Dreiplatten-Schleifverfahren für das maßgebliche Bindeglied zwischen technischer Praxis und theoretischer Geometrie. In der Tat wird der grundlegende Formtyp „Ebene“ gleichsam urerzeugt, d.h. ohne Rückgriff auf bereits vorhandene Muster realisiert. Das ist erstaunlich und scheint darauf hinzudeuten, dass sich ein Wissen darüber, was eine Ebene ist, in dem Verfahren verbirgt. Die formale Axiomatik, die nach dem Vorbild DAVID HILBERTS mathematische Grundbegriffe lediglich durch Gebrauchsregeln fixiert, verzichtet auf derartige Wesensbestimmungen. Im Unterschied dazu ging es DINGLER darum, die Geometrie von vornherein als einen inhaltlichen (nämlich durch Handlungsvorschriften interpretierten) apriorischen Teil der Physik aufzubauen. Ob dies in der Folge, etwa mit LORENZENS verschiedenen Fassungen einer „Protogeometrie“, gelungen ist, mag an dieser Stelle offen

bleiben. Begrifflich noch zu wenig geklärt ist z.B. das folgende Eindeutigkeitsproblem: Passen Ebenenexemplare, die aus unabhängigen Schleiftripeln hervorgehen, ihrerseits zueinander? Man wird dies erwarten; allerdings steht eine schlüssige protogeometrische Begründung noch aus.

## Umkämpfte Grenzen

Homogene Ränder finden sich typischerweise an technischen Artefakten. Ränder und Grenzen, die im freien Kräftespiel der Natur entstehen, sehen zumeist anders aus. Küsten, Gebirgskämme oder Wolken haben zerklüftete, verkrüppelte oder aufgelöste Konturen. Der Weg des Odysseus zwischen Skylla und Charybdis hatte vermutlich wenig Ähnlichkeit mit einer Geraden. Wetteifern zwei oder mehr Mächte um die Vorherrschaft, so bilden sich zwischen den Gebieten, die sie unter ihren Einfluss bringen, komplexe Grenzen aus. – Im Folgenden wollen wir einen ersten Eindruck davon vermitteln, wie solche Phänomene aussehen und wie sie mathematisch beschrieben werden können.

Die hier zuständige Theorie dynamischer Systeme beschäftigt sich mit zeitabhängigen Prozessen. Ein einfaches Beispiel: Wächst eine Population  $x$  in einer Beobachtungsperiode mit einer Rate von 4 %, so notieren wir einen Übergangspfeil zwischen sukzessiven Zuständen:  $x \mapsto 1.04x$ . Über 3 Perioden entwickelt sich dieser Prozess wie folgt:

$x \mapsto 1.04x \mapsto 1.04^2 x \mapsto 1.04^3 x$ , der Populationsbestand nimmt also exponentiell zu und überschreitet dabei auf lange Sicht jeden noch so großen Wert. Nach diesem Schema entwickelt sich beispielsweise ein kumulativ verzinstes Kapital. Es versagt jedoch schon für primitive Organismen (Hefepilze, Wimperntierchen etc.): Mangel an Nahrung und Raum – je nach Individuenart auch Konkurrenzkämpfe, Stress und Krankheiten – wirken sich bei größer werdender Dichte der Population zunehmend hemmend auf das Wachstum aus.

Der Belgier P. F. VERHULST hat 1845 ein einfaches Modell vorgeschlagen, das diesem Antagonismus gerecht wird. Deuten wir die Variable  $x$  jetzt als Anteil des Populationsbestandes an einem Sättigungswert, so lautet der Prozess:  $x \mapsto ax(1-x)$ . Der Ausdruck  $ax$  erinnert an das exponentielle Wachstum und besagt, dass der Zuwachs eines Bestands zu diesem selbst proportional ist. Allerdings sorgt gleichzeitig der zweite Faktor  $1-x$  gegenläufig dafür, dass sich der Bestandsanteil umso stärker verringert, je mehr sich der aktuelle  $x$ -Wert seinem Soll-Maximum 1 nähert. Die Zahl  $a$  kann als Wachstumsfaktor gedeutet werden und ist auf Werte zwischen 1 und 4 einzuschränken (Grund:  $a \leq 1$  führt zum Aussterben,  $a > 4$  zu negativen Bestandswerten). Bei normalen Wachstumsraten, genauer: für alle  $a \leq 2$ , verläuft ein VERHULST-Prozess ohne jede Überraschung. Wird etwa als Startwert  $x = 0.1$  gewählt (der Anfangsbestand nimmt also ein Zehntel des Möglichen ein), so ergibt sich für  $a = 1.3$  der in Fig. 25 gezeigte Verlauf.

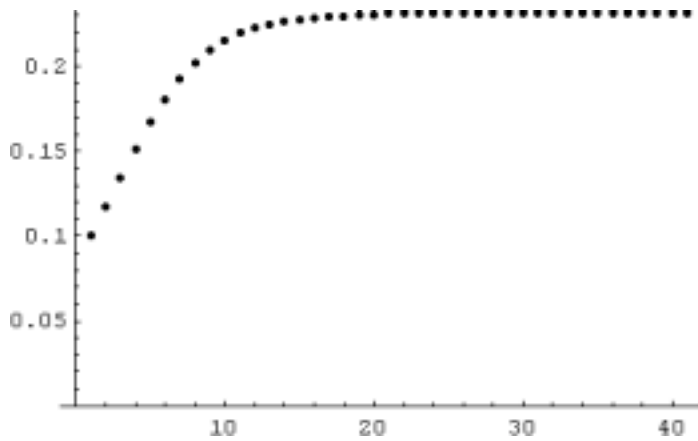


Fig. 25

Gemäß dieser logistischen Kurve (< franz. logis) wächst die Population beständig, erst stark und später abflachend gegen einen Grenzwert, der dabei niemals erreicht oder überschritten wird. Das ändert sich für größere Faktoren  $a$  mit  $2 < a \leq 3$ . Zwar konvergiert auch hier der Prozess, jedoch in einer gedämpften Schwingung, die anfangs über den Grenzwert hinaus-schießen kann, sich dann aber rasch auf seinem Niveau stabilisiert. In dem noch verbleiben-dem Intervall  $3 < a \leq 4$  zeigt die VERHULST-Dynamik verblüffend komplizierte Verhaltens-muster. Zunächst verliert der alte Grenzwert unter dem erhöhten Wachstumsdruck seine An-ziehungskraft und wird durch zwei Werte (Attraktoren) ersetzt; dabei gabelt sich die Punktfolge in zwei Teilfolgen, von denen jede gegen einen der beiden neuen Attraktoren strebt. Bei geringfügiger Erhöhung von  $a$  – und dann in sich verkürzenden Abständen zwi-schen aufeinander folgenden Erhöhungen – wiederholt sich diese Bifurkation, sodass 4, 8, 16, usw. und damit beliebig viele Attraktoren ins Spiel kommen. Fig. 26 zeigt einen Prozess mit 4 Attraktoren.

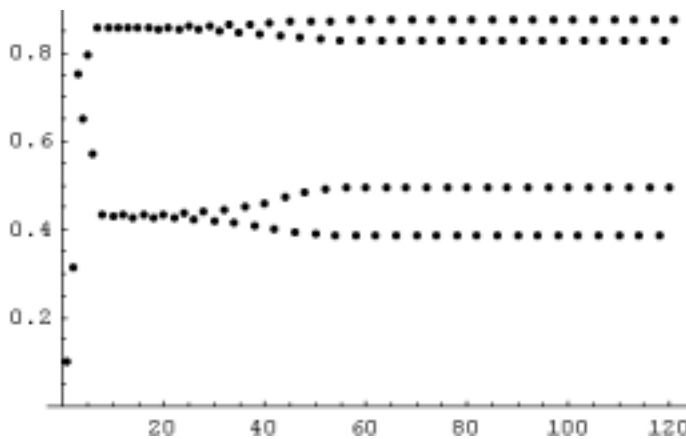


Fig. 26

Die Attraktorverdopplung hat eine Grenze! Sie liegt bei  $a_{\infty} = 3.5699456\dots$ , was heißt: Für nahe an diesem Wert gelegene  $a < a_{\infty}$  sieht der VERHULST-Prozess wie ein stark verzweigter Baum aus. Überschreitet der Wachstumsfaktor diese Grenze, so springt der Prozess wild und scheinbar völlig regellos hin und her. Der ganze Verlauf mutet chaotisch an, ist aber nach wie vor durch die algorithmisch eindeutige Übergangsvorschrift  $x \mapsto ax(1-x)$  bestimmt. In der Systemdynamik spricht man daher vom „deterministischen Chaos“. – Numerische Rechnun-gen in der Chaos-Region sind überaus heikel. Kleinste Veränderungen beim Startwert oder

Rundungsfehler bei den Zwischenwerten können sich auf lange Sicht erheblich auswirken. Die Redensart „kleine Ursache – große Wirkung“ passt gut auf diese Situation.

Ausgehend vom VERHULST-Prozess entdeckte BENOIT B. MANDELBROT 1980 eine merkwürdige Gestalt, die sich in der Folge als geradezu universelles Objekt für das Studium komplexer Grenzen entpuppt hat. Wir wollen hier nur die ersten Schritte zurücklegen, die an das bekannte „Apfelmännchen“ (wie die MANDELBROT-Menge im Populärjargon genannt wird) heranführen. Weitergehende Informationen, begleitet von einer Fülle faszinierender Computergrafiken, bietet z.B. der von PEITGEN und RICHTER herausgegebene Band „The Beauty of Fractals“ (1986).

Der VERHULST-Prozess ist nicht-linear, was sofort klar wird, wenn man den Klammerausdruck zu  $ax - ax^2$  auswertet. Er lässt sich sogar rein-quadratisch darstellen. Dazu ersetzen wir die Variable  $x$  durch  $\frac{1}{2} - \frac{z}{a}$  und erhalten nach kurzer Rechnung die auf  $z$  umgeschriebene Übergangsregel:  $z \mapsto z^2 + c$ , wobei  $c = \frac{a}{2}(1 - \frac{a}{2})$ . MANDELBROT hat die VERHULST-Dynamik in dieser einfachen Form untersucht, dabei allerdings nicht mit reellen, sondern mit komplexen Zahlen gerechnet. Von vielen Sachverhalten gewinnt man dabei ein umfassenderes Bild.

Eine komplexe Zahl  $z$  stellt man sich am besten als Paar  $(x, y)$  reeller Zahlen vor oder als Punkt in der Ebene mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ . Üblicherweise schreibt man  $z = x + yi$  und behandelt diesen Ausdruck wie eine gewöhnliche Summe. Die sog. imaginäre Einheit  $i$  entspricht dem Punkt  $(0,1)$ ; gerechnet wird mit ihr formal nach dem Rezept:  $i^2 = -1$ . Die komplexen Zahlen bilden einen algebraischen Körper  $\mathbb{C}$ . Er umfasst den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen und erlaubt die vertrauten Rechenarten. Ein Beispiel zur Multiplikation:

$$(2 + 3i)(1 - 5i) = 2 - 10i + 3i - 15i^2 = 17 - 7i .$$

Um einen Überblick über den Prozess  $z \mapsto z^2 + c$  zu gewinnen, muss man untersuchen, wie sich verschiedene Werte  $c$  auf seine Dynamik auswirken. Der einfachste Fall ist  $c = 0$ , es wird also eine (komplexe) Startzahl  $z_0$  quadriert, das Ergebnis erneut quadriert usw.:

$z_0 \mapsto z_0^2 \mapsto z_0^4 \mapsto z_0^8 \mapsto \dots$  Drei Fälle sind möglich: 1.  $|z_0| < 1$ , d.h. der Startpunkt liegt im Innern der Kreisscheibe vom Radius 1 um den Nullpunkt. Dieser ist auch Grenzpunkt, dem die Punktfolge zustrebt. 2. Startet man außerhalb des Einheitskreises ( $|z_0| > 1$ ), so wird die Punktfolge unbegrenzt weit nach außen getrieben. 3. Schließlich besagt  $|z_0| = 1$ , dass der Startpunkt auf dem Kreisrand liegt. Dort bleibt dann die ganze Punktfolge. Der Kreisrand ist somit die Grenze zwischen zwei Einflussbereichen, in die der Prozess für  $c = 0$  die Ebene aufteilt (Fig. 27).

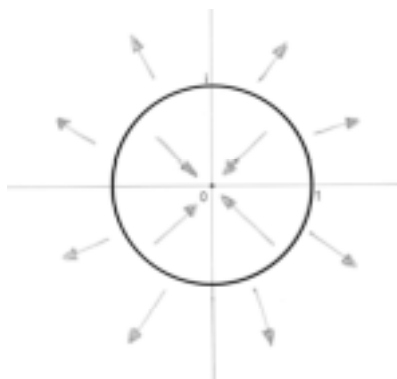


Fig. 27

Wählen wir nun ein anderes  $c$ , etwa  $c = -0.12375 + 0.56508i$ . Auch hier entsteht eine ge

geschlossene Grenzkurve. Die Punkte in ihrem Innern streben jedoch gegen einen anderen Attraktor als Null, und die Kurve selbst ist kein Kreis, sondern ein unendlich zerklüftetes Gebilde (Fraktal) (Fig. 28, linker Kasten). Bei weiteren Variationen von  $c$  wird die Grenzkurve auf ungeahnte Weise deformiert. Beispielsweise treten für  $c = -0.12 + 0.74i$  anstelle von zwei unendlich viele (fraktal begrenzte) Einflussbereiche auf, die nur noch an einzelnen Randpunkten untereinander zusammenhängen (Fig. 28, rechter Kasten).

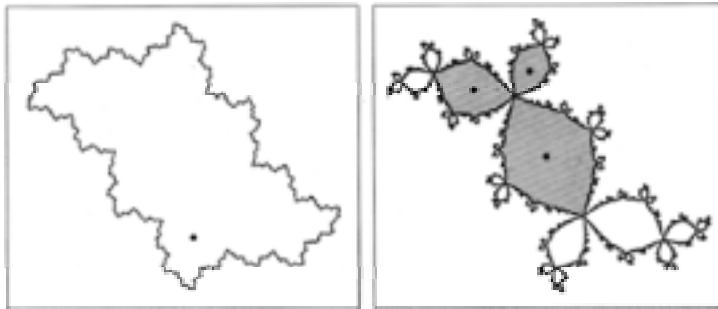


Fig. 28

Ein seltsames Gebilde, Dendrit genannt, entsteht bei der Wahl von  $c = i$ ; es erinnert an einen Blitz und besitzt überhaupt keinen flächigen Charakter mehr (Fig. 29, linker Kasten). Für  $c = 0.11031 - 0.67037i$  geht gar der Zusammenhang verloren und das Ganze zerstäubt in einer Partikelwolke (Fig. 29, rechter Kasten). – Die bei diesen Prozessen entstehenden Ränder (Grenzen zwischen Attraktorgebieten) werden JULIA-Mengen genannt, zu Ehren des französischen Mathematikers GASTON JULIA (1893-1978), der dazu bereits Anfang des 20. Jahrhunderts allgemeine theoretische Grundlagen schuf.

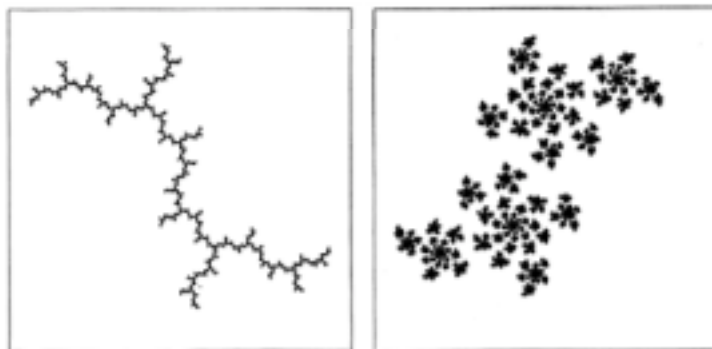


Fig.29

Dem Übergang von (noch) zusammenhängenden zu unzusammenhängenden JULIA-Mengen hat MANDELBROT mit seiner berühmten Menge  $\mathbf{M}$  Gestalt verliehen.  $\mathbf{M}$  besteht nämlich aus genau den Werten von  $c$ , bei denen eine zusammenhängende JULIA-Menge entsteht (Fig.30).

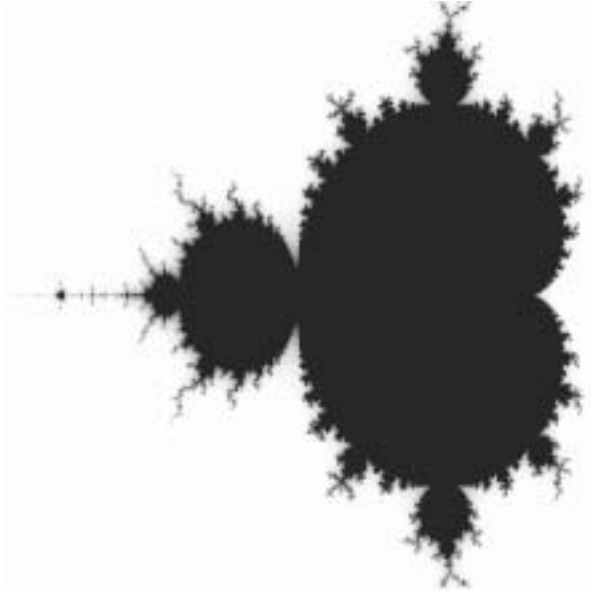


Fig. 30

Das Apfelmännchen ist ein ungewöhnlich komplexes fraktales Objekt. Sein struppig-bizarren geformter Rand ist die Grenze, an der sich zusammenhängende von nicht-zusammenhängenden JULIA-Mengen scheiden; diesen entsprechen die Punkte im Äußeren, jenen die Punkte im Inneren der Figur. Wie bei den in  $\mathbf{M}$  „kartierten“ JULIA-Mengen sitzen auf dem Rand des Apfelmännchens unendlich viele verkleinerte Kopien seiner selbst. Es selbst ist übrigens eine zusammenhängende Menge (1982 von DOUADY und HUBBARD bewiesen).

Mit leistungsfähiger Computergrafik ist es möglich, sich auf einem Pfad durch das Innere von  $\mathbf{M}$  zu bewegen und dabei die JULIA-Mengen anzuschauen, deren  $c$ -Werte auf dem Pfad liegen. Man erhält so Filmsequenzen wie von einer Geisterfahrt – vorbei an züngelnden Flammen und Schluchten, an Strudeln und Zonen, die von Seepferdchen bevölkert scheinen. Immer wieder tauchen dabei unerwartet die kleineren Doppelgänger des Apfelmännchens auf. Verläuft der Pfad vom Innern über den Rand ins Äußere von  $\mathbf{M}$ , so wird dramatisch sichtbar, wie die JULIA-Mengen ihren Zusammenhang verlieren und zerstreuen. – Wir erwähnen noch die merkwürdige Antenne des Apfelmännchens. In ihr stecken die  $c$ -Werte, die der Chaos-Region im reellen VERHULST-Prozess entsprechen. Die kleine Verdickung in ihr entpuppt sich bei genauerem Hinsehen – wen wundert's – als ein Apfelmännchen.

## Literatur

Bender, P.; Schreiber, A.: Operative Genese der Geometrie. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien, B. G. Teubner: Stuttgart 1985

Dingler, H.: Die Grundlagen der Geometrie. Stuttgart 1933

Lorenzen, P.: Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. In: *Philosophia Naturalis* 6 (1961), S. 415-431

Peitgen, H.-O.; Richter, P. H.: *The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamic Systems*. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg 1986

## **Abbildungsnachweise**

Fig. 1-16: H. Wellstein; Fig. 17: Meyers Neuer Handatlas. BI Mannheim AG; Geographisch-kartographisches Institut Meyer 1974, S. 147; Fig. 18: A. Schreiber; Fig. 19: Werner Gilde: Gespiegelte Welt. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979 (Lizenzausgabe Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln), S. 86; Fig. 20: Bender/Schreiber 1985, S. 327; Fig. 21: Bender/Schreiber 1985, S. 43; Fig. 22-27: A. Schreiber; Fig. 28: Peitgen/Richter 1986, S. 10; Fig. 29: Peitgen/Richter 1986, S. 14; Fig. 30: A. Schreiber