Alfred Schreiber

Auf der Suche nach der verlorenen Wirklichkeit

Zu Herkunft und Bedeutung des Konstruktivismus in der Mathematik

Über welche Dinge redet die Mathematik?

Um die Frage nach den Dingen (im Allgemeinen) und ihrer Erkennbarkeit kümmert sich seit je die Philosophie. Sie fragt erkenntniskritisch nach der Möglichkeit von Vorstellungen, die auf etwas verweisen, das in der (naiven) Meinung des Vorstellenden unabhängig von ihm („an sich“) besteht, ebenso wie nach den allgemeinsten Gesetzlichkeiten dieser als „objektiv“ vorgestellten Welt. Diese scheint uns ohne unser Zutun als Wirklichkeit gegeben. Daneben – oder besser: darin – gibt es „Welten“, die vom Menschen gemacht wurden. LEONARDO DA VINCI, der in seinen Tagebüchern über die Erkennbarkeit des Gegebenen und des Gemachten nachdenkt, rät allen Wissbegierigen zur Bescheidenheit :

> *O speculatore delle cose, non ti laldare di conoscere le cose che ordinariamente per se medesima la natura conduce. Ma rallegrati di conoscere il fine di quelle cose che son disegnate dalla mente tua.* (Ash. G. 47 r.)
>
> (O Erforscher der Dinge, rühme dich nicht, die Dinge zu kennen, welche die Natur gewöhnlich durch sich selbst vollbringt. Freue dich dagegen, den Zweck jener Dinge zu kennen, die von deinem Geist entworfen sind.)

Sind nun die Dinge, über welche die Mathematik redet, jene *cose che son disegnate dalla mente tua*, von denen LEONARDO spricht? Dies wäre schon eine ziemlich moderne, dem Konstruktivismus nahestehende Auffassung. Ihren Gegenpol bildet die auf PLATON zurückgehende Ansicht, nach der die Realien der Mathematik zu einer objektiven Sphäre gehören – unabhängig von den Menschen, die sich mit ihnen beschäftigen.

Die Frage nach der mathematischen Gegenstandswelt ist nicht leicht zu beantworten. Als einzige unter den Wissenschaften untersucht die Mathematik Objekte von idealer Beschaffenheit (z.B. geometrische Geraden: nach beiden Seiten hin unbegrenzte, zudem „unendlich dünne“ Gebilde); auch geht sie mit nicht-endlichen Prozessen um (z.B. Limesprozesse der Analysis). Wie ist es möglich, Erkenntnisse über solche Dinge nicht nur zu gewinnen, sondern auch noch streng (in einem „zwingenden“ Diskurs) zu beweisen, der ihnen zeitlose Gültigkeit verleiht (oder zu verleihen scheint)? – Diese Frage ähnelt offenbar wenig einem typischen innermathematischen Problem; und bis heute haben alle Versuche, die Mathematiker und Philosophen zu ihrer Beantwortung unternommen haben, nicht zu eindeutigen und stabilen Ergebnissen geführt. Vielmehr sehen wir uns in eine unabschließbare Sinndebatte versetzt, die im

Laufe der Zeit immer neue Ismen hervorgebracht hat; sie liefert den geistesgeschichtlichen Hintergrund, vor dem im Folgenden die Idee der Konstruktivität und die Rolle des Konstruktivismus in der Mathematik verständlich gemacht werden sollen.

Überblick: Geschichte einer Enttäuschung

Ausgangspunkt ist PLATONs Auffassung, das mathematische Wissen sei zunächst verborgen, könne aber jedem Menschen mit etwas Hilfe (Mäeutik, Hebammenkunst) bewusst gemacht werden. Berühmt ist sein Dialog *Menon*, in dem er SOKRATES mit einem Sklaven über die Aufgabe sprechen lässt, ein gegebenes Quadrat zu verdoppeln. Schließlich gelangt der Sklave über eine wohlinszenierte Reihe von Stützfragen – PLATON meint: durch eine Art von Erinnerung (Anamnesis) – zur gewünschten Einsicht in die Lösung. Erkennen heißt hier: Teilhabe an einer Welt reiner Gedankendinge (Ideen) *hinter* den wechselnden Erscheinungen.

Eine solche statische Sicht – mag sie der Mathematik auch zu höheren Weihen verhelfen – verfehlt gleichwohl die reale, gar nicht kontemplative Praxis. Die wenigsten mathematische Resultate fallen geradewegs vom Platonischen Ideen-Himmel; vielmehr entstehen sie durch mühevolle Arbeit, Irrtümer und ihre Beseitigung eingeschlossen, und haben sich im gemeinschaftlichen Diskurs aller am Erkenntnisprozess Beteiligten zu behaupten. Die geschichtliche Entwicklung der Mathematik belegt denn auch deutlich, dass die Inanspruchnahme von Anschauung („Wesensschau“, „Evidenz“, u.ä.) immer mehr zurückgedrängt wurde zugunsten von Prozessen der Versprachlichung und Formalisierung – Erkenntnismittel, die im mathematischen Diskurs (und das heißt vor allem: beim *Beweisen*) benötigt werden. Damit geht der Verlust gegenständlicher Bedeutungen einher, die – zuvor als gleichsam naturgegeben den Begriffen hinterlegt – nun nicht länger gebraucht werden. Ihren Höhepunkt erreicht diese Entwicklung im *Formalismus*. Nach dieser Auffassung ist die Mathematik ein formales (axiomatisches) System, in das man „von außen“ nicht hineinargumentieren kann (schon gar nicht philosophisch). DAVID HILBERT pries es als „CANTORS Paradies“, aus dem man sich nicht vertreiben lasse. Die Anspielung gilt konstruktivistischen (und intuitionistischen) Kritikern des Formalismus, die glaubten, bestimmte mathematische Gegenstandsarten (Zahlen, Kontinua, etc.) ließen sich aus einem anschaulichen Substrat heraus konstituieren. Dieser Vorstoß hatte letztlich keinen nachhaltigen Erfolg. Triumphierte noch in der Mitte des 20. Jahrhunderts eine strukturalistische Spielart des Formalismus (BOURBAKI), so waltet heute, in den postmodernen Werkstätten allseitig einsetzbarer Modellschreiner, ein pragmatisch gemäßigter, pluralistischer und instrumentalistischer Formalismus.

Philosophische Betrachter mögen die hier angedeutete Geschichte als insgesamt enttäuschend empfinden, ist sie doch ein desillusionierender Abstieg von der Höhe des platonischen Himmels hinab in die Niederungen eines Formalismus, der auf Praktikabilität Wert legt und Grundlagenfragen weitgehend ausklammert. Konstruktivistische Gegenentwürfe vermochten diesen Prozess nicht aufzuhalten, allenfalls zu verlangsamen. HERMANN WEYL, der 1930 Nachfolger HILBERTs wurde und zunächst intuitionistischen Ideen nahestand, zog in späteren Jahren das (auch die Physik einbeziehende) Fazit: „We are left with our symbols.“

In der Tat, am Ende hat man etwas anderes erreicht als ursprünglich beabsichtigt. Gleichzeitig zeigen sich darin aber auch Stärke und Erfolg der Mathematik, denn *Ent-täuschung* (jetzt mit Bindestrich) heißt ja auch: Befreiung von täuschenden Bestandteilen. Und eben dies ist ein wesentlicher Zug mathematischer Erkenntnisfindung und -fixierung: Man beseitigt solange Falsches, Unsicheres, Undeutliches und Vages, bis alle am Erkenntnisprozess Beteiligten das Ergebnis annehmen können.

Es sollen nun einige Episoden und Facetten dieser Geschichte verdeutlichen, inwiefern Anschauung als Erkenntniskategorie durch Prozesse der Ent-täuschung und die damit einhergehende Formalisierung von Begriffen und Argumentationen zu relativieren oder außer Kraft zu setzen war. In einem historisch späten Stadium dieser Entwicklung treten konstruktivistische Ideen als Gegenspieler auf den Plan, mit bescheidenem Erfolg.

Anschauung als Erkenntnisquelle

Die Geometrie des THALES (um 600 v. Chr.) war noch nicht deduktiv. Ihre Erkenntnisse entspringen naiver (zum Teil aber schon „gereinigter") anschaulicher Evidenz. Als Beispiel diene die klassische Fig. 1, in der zwei beliebige Geraden durch den Mittelpunkt eines Kreises führen.

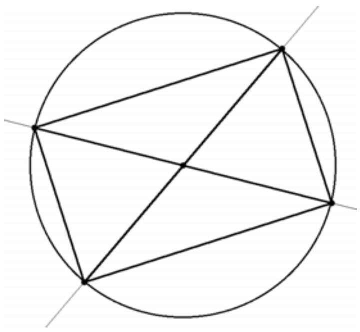

Fig. 1

Durch die Schnittpunkte auf dem Kreis entstehen allerlei Teilfiguren: zwei Paare (dekkungs)gleicher gleichschenkliger Dreiecke, zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke, ein Rechteck. Man überzeugt sich unschwer davon, dass bloßes Beobachten keineswegs genügt, um einzusehen, dass an den Ecken auf dem Kreis rechte Winkel entstehen.

Dass wir uns auf die naive Beobachtung (sinnliche Wahrnehmung allein) nicht verlassen können, erfahren wir bei vielen, auch alltäglichen Gelegenheiten. Die Gestalt- und Wahrnehmungspsychologie illustriert das Problem durch eindrucksvolle Täuschungsfiguren, z.B. das Parallelogramm nach SANDER (Fig. 2). Es enthält zwei diagonale Strecken, die wir (bedingt durch die Umgebung) als verschieden lang wahrnehmen:

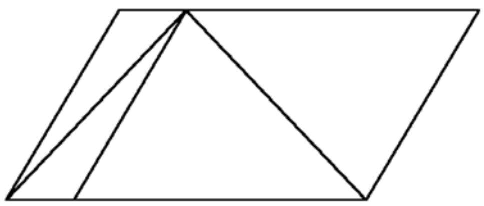

Fig. 2

Schon ZENON VON ELEA (5. Jh. v. Chr.) ist über eine Wahrnehmungskritik weit hinausgegangen, wenn er versucht hat, den Raum, das anschauliche Kontinuum, in dem wir uns bewegen und Bewegungen anderer Körper wahrnehmen, hinsichtlich seines Realitätsgehalts ein für allemal verdächtig zu machen. Scharfsinnig ist sein keineswegs leicht aus dem Weg zu räumendes Paradoxon von der Unmöglichkeit der Bewegung. Danach kann ein Stein nicht zu Boden fallen, ja nicht einmal seine Fallbewegung beginnen, weil er immer schon zuvor den

Mittelpunkt der als nächstes zu durchlaufenden Fallstrecke erreichen müsste.

Folgen wir dem Mathematikhistoriker A. SZABÓ (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München/Wien 1969), so darf in ZENONs Anschauungskritik eine treibende Kraft gesehen werden, die weg vom anschaulich-empirischen Erkennen (dem die thaletische Geometrie noch verhaftet war) hin zum *diskursiven* und dann *deduktiv begründenden* Denken (Argumentieren und Beweisen) geführt hat.

Monster: das ursprünglich nicht Gemeinte

Die mathematische Begriffsbildung hat immer wieder, nämlich systembedingt, mit so genannten *Monstern* zu tun: Sachverhalten, die man eigentlich nicht unter einen Begriff oder einen allgemeinen Satz fassen möchte, die aber ungewollt als „pathologische" Grenz- und Sonderfälle auftauchen. Am Begriff der „stetigen Kurve" lässt sich dies gut verdeutlichen. Seit dem 17. Jahrhundert hat sich die Analysis mit vielerlei stetigen Veränderungen in der unbelebten Natur befasst und deren Verläufe analytisch-algebraisch durch Funktionen (graphisch durch ebene Kurven) dargestellt. Ein einfaches Beispiel dafür bietet der Geschwindigkeitsverlauf eines Körpers, der in einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft gleichmäßig beschleunigt nach unten sinkt (Fig. 3).

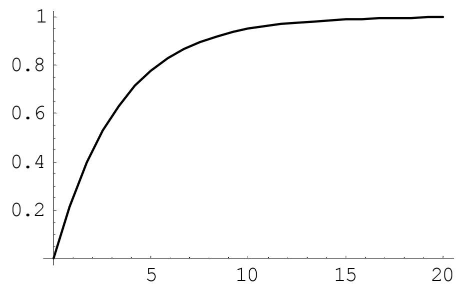

Fig. 3

Ein solche glatte Kurve mag zu der anfänglichen Vorstellung geführt haben, den Graphen einer stetigen Funktion könne man „in einem Zug" mit der Hand zeichnen: *libero manu ductu* heißt es noch bei EULER. In dem Moment jedoch, da man beweisbare Einsichten über Stetigkeit benötigt, gibt eine solche anschaulich-deskriptive (und zudem auf außermathematische Mittel wie eine „Hand" zurückgreifende) Erläuterung nichts her.

Für die genaue Analyse – das ist typisch für die Mathematik – benötigt man eine Definition, die ausschließlich *Sprachmittel* verwendet. Die lag keineswegs nahe; man musste ja zunächst eine neue intuitive Idee von der Stetigkeit entwickeln (etwa die, dass der Funktionsverlauf ein vorgebbares Wertintervall nicht verlässt, wenn man ihn in einem geeignet kleinen Zeitintervall untersucht – CAUCHY hat schließlich im 19. Jahrhundert daraus eine exakte Definition gewonnen).

Nach der Ent-täuschung im positiven Sinn folgt nicht selten auch eine Enttäuschung im negativen Sinn, hier: das Auftauchen von Beispielen („Monstern"), die unter die exakte Definition fallen, jedoch in anderen Hinsichten nicht mehr dem intuitiven Bild entsprechen, das man sich ursprünglich von der Sache gemacht hat. Kann man sich beispielsweise vorstellen, dass eine stetige Kurve ein Quadrat vollständig ausfüllt? – Eigentlich nicht. Dennoch ist dies möglich, wie eine von HILBERT erdachte Kurve zeigt (Fig. 4a):

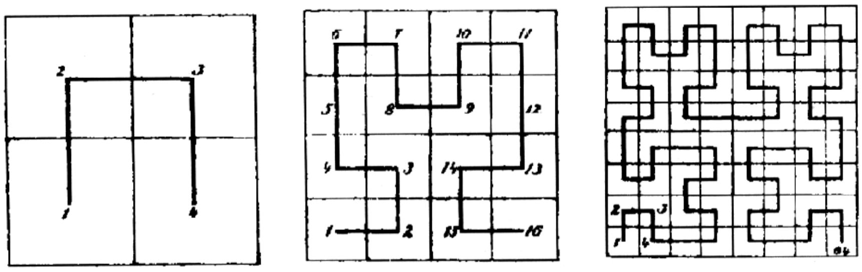

Fig. 4a (aus HILBERTs Originalarbeit von 1890)

Nach ein paar weiteren Iterationsschritten erhält man das in Fig. 4b gezeigte Bild (hier leicht vergrößert).

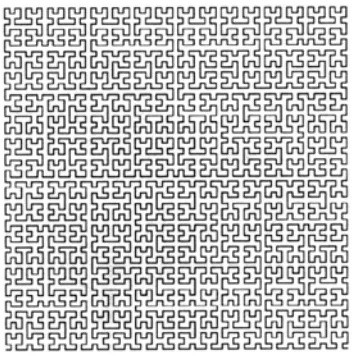

Fig. 4b

Die eigentliche „Kurve“ entsteht schließlich als Grenzgebilde der hier gezeigten Mäander. Es sieht aus wie ein schwarzes Quadrat – wohlgemerkt: es sieht so aus, aber es *ist* kein schwarzes Quadrat! – Hier wird gleich mehrfach das Alltagsverständnis von „Kurve“, „Stetigkeit“ und „Dimension“ herausgefordert!

Papier-und-Schere-Geometrie?

Auch scheinbar einfache Sachverhalte können bei genauer Betrachtung paradoxe Ergebnisse an den Tag bringen. Kehren wir noch einmal zurück zu unserer THALES-Figur (Fig. 5)

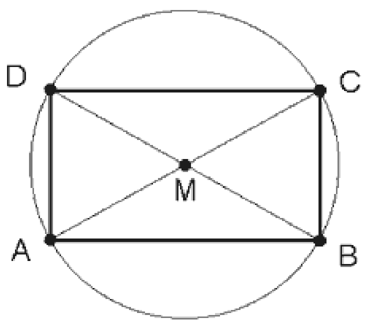

Fig. 5

und lenken das Augenmerk auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACD und CAB. Diese sind kongruent, d.h. in moderner Abbildungssprache ausgedrückt, eine Halbdrehung um M bringt die beiden Dreiecke zur Deckung.

Wenn man will, kann man diese Einsicht auf einer visuell-materiellen Stufe nachvollziehen, etwa indem man ein Rechteck aus Papier entlang seiner Diagonalen mit der Schere durchschneidet und die beiden Teildreiecke übereinanderlegt. Soweit ist alles in Ordnung. Allerdings nur, wenn wir nicht genau danach fragen, inwieweit die Deckungsgleichheit der Dreiecke und die Papier-und-Schere-Operation einander entsprechen. Von Flächenstücken, die sich durch eine Bewegung zur Deckung bringen lassen, kann in der THALES-Figur keine Rede sein. Vielmehr liegen die beiden Dreiecke, um die es geht, nicht als getrennte Stücke (und schon gar nicht als papierdicke Körper materialisiert) übereinander, sondern verharren als *Teile eines statischen Ganzen* und stehen lediglich in einer über die Symmetrie in der Gesamtfigur ausgedrückten Beziehung zueinander.

Tatsächlich hält die durch die Papier-und-Schere-Operation suggerierte Evidenz, ein Rechteck zerfalle durch einen diagonalen Schnitt in zwei kongruente Teile, einer begrifflichen Analyse nicht stand. In der Endlage (Deckung) liegen entsprechende Punkte der beiden Dreiecke übereinander. Das lässt sich etwa mit Hilfe einer Nadel demonstrieren, die beide Papierdreiecke durchsticht. In der *Praxis* der „Papier-und-Schere-Geometrie" ist das kein Problem, solange wir mit unseren Papierfiguren hantieren. In der *Theorie* jedoch, d.h. in der Betrachtung der reinen Formen, treffen wir auf eine Schwierigkeit: Was ist mit dem Teil der Figur, entlang der wir den Schnitt getätigt haben? Gehört die gemeinsame Hypotenuse zum Dreieck ACD, so fehlt sie dem Dreieck CAB (dem damit auch die Ecken A und C abhanden gekommen wären). In der Papierwelt kann ein streckendicker Überstand an einer Figur natürlich nicht entdeckt werden.

Aber vielleicht lässt sich das Problem so lösen, dass die Halbdiagonale AM zu dem einen, das übrig bleibende Stück MC zum anderen Dreieck hinzugenommen wird? In der Tat entsprechen sich diese beiden Hälften in der endgültigen Passlage: Der Punkt C liegt auf A – aber welcher Punkt des Dreiecks CAB liegt auf M (wenn wir annehmen, dass die ganze Strecke AM zu Dreieck ACD gehört)? Es könnte nur der Punkt M selbst sein, der jedoch nicht zum Dreieck CAB gehört. Ausgerechnet am (nicht weiter aufteilbaren) Symmetriezentrum der THALES-Figur scheitert also der Versuch, die scheinbar konkret-anschauliche Demonstration der Zerlegung eines Rechtecks in zwei deckungsgleiche Teile gedanklich-begrifflich nachzuvollziehen. In *dieser* Form ist sie denn auch unmöglich.

Die hier praktizierte Mengengeometrie, die Figuren als die Gesamtheiten ihrer Punkte auffasst, kennt noch weitere Paradoxa von ganz anderem Kaliber. Zum Beispiel kann eine (dreidimensionale) Vollkugel so in endlich viele Teile zerlegt werden, dass sich aus ihnen zwei Vollkugeln zusammensetzen lassen, die beide denselben Radius haben wie die Ausgangskugel (BANACH-TARSKI-Paradox).

Es gibt nicht nur eine Geometrie

In allen (ebenen) Dreiecken hat die Winkelsumme denselben konstanten Wert (180°). In der Schule zeigt man dies, indem man durch eine Ecke des Dreiecks eine (die einzige!) Parallele zur gegenüberliegenden Seite zieht und die so entstehenden Wechselwinkel betrachtet. Und woher weiß man, dass es (in der Ebene) zu einer Geraden und einem beliebigen Punkt durch ihn genau eine parallele Gerade gibt? Dieses Parallelenaxiom (PA) hat schon EUKLID beweisen wollen; jedenfalls führt er es unter seinen Postulaten für geometrische Konstruktionen auf. „Zwei Jahrtausende und mehr" – so meinte ein bekannter Mathematikhistoriker – „haben an dieser zähen Speise gekaut". Am Ende war klar: Das PA ist unabhängig von den übrigen Axiomen der Geometrie, was heißt: es kann nicht aus ihnen abgeleitet werden. Zunächst entdeckten Anfang des 19. Jahrhunderts unabhängig voneinander N. I. LOBATSCHEWSKI und J. BOLYAI, dass man eine sog. absolute Geometrie aufbauen kann, in der alle Axiome außer dem PA erfüllt sind. Später kamen dann Systeme hinzu, bei denen mehr als eine Parallele existiert.

Die sog. nicht-euklidischen Geometrien wurden erst möglich, nachdem man so weit war, sich im geometrischen Denken nicht mehr auf den Raum der Erfahrungswelt oder einen vermeintlich objektiven Anschauungsraum zu beziehen. Stattdessen erlaubt man sich eine Uminterpretation der geometrischen Grundbegriffe, z.B. auf der Kugel: Punkte sind auch dort Punkte, Geraden hingegen Großkreise um das Kugelzentrum. Da zwei Großkreise sich immer in antipodischen Punkten schneiden, ist das PA verletzt. (Natürlich muss noch nachgewiesen werden, dass im übrigen die absolute Geometrie gilt.)

Neue Bedeutungen, die nicht willkürlich, aber im Prinzip *frei* zugewiesen werden können, ersetzen auf diese Weise das frühere anschauliche Substrat der Grundbegriffe. Der nächste, radikalere Schritt besteht darin, eine Theorie von jeglicher Bedeutungszuweisung (Interpretation) abzulösen. Ihren Sinn erhalten die Begriffe dann lediglich durch das, was man *Gebrauchsverstehen* nennen könnte. EUKLID hatte noch zu erklären versucht, was ein Punkt, was eine Gerade eigentlich, d.h. ihrem Wesen nach sei: *Ein Punkt ist, was keine Teile hat*, und dgl. mehr. Um 1900 wird diese Form essentialistischer Axiomatik endgültig fallengelassen. Werden Sätze in der Mathematik bewiesen, dann muss man höchstens von der Tatsache (Annahme) Gebrauch machen, dass durch zwei Punkte genau eine Gerade verläuft oder dass es drei Punkte gibt, die nicht auf einer Geraden liegen, usw. Was man nicht wissen muss, ist, was ein Punkt ist oder gar wie Punkte, Geraden, Ebenen etc. aussehen!

In seinen *Grundlagen der Geometrie* (1899) beginnt HILBERT folgerichtig mit der Erklärung: „Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit *A*, *B*, *C*,...; die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Geraden* ... “ usw. Im Wartesaal eines Berliner Bahnhofs soll HILBERT das so ausgedrückt haben: *Man muß jederzeit an Stelle von 'Punkte, Geraden, Ebenen' 'Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können* (nach der HILBERT-Biografie von O. BLUMENTHAL). – Für mathematische Objekte wird auf die Forderung verzichtet, sie müssten anschaubar sein. Mehr noch, es wird nicht einmal vorausgesetzt, dass es das, worüber Sätze ausgesagt und bewiesen werden, überhaupt gibt.

Abstraktion & Co.

Die vorangegangenen Schilderungen, die sich mühelos um weitere Beispiele ergänzen ließen, illustrieren, wie sehr das mathematische Denken durch *Rückzug aus der Realität* geprägt ist. Das bedeutet nicht, die Funktionen der Anschauung, etwa als Anstoß und Leitfaden mathematischer Erkenntnis, sollten gänzlich bestritten werden; die Zeugnisse der Vergangenheit belegen ihre unentbehrliche heuristische Rolle zur Genüge. Allerdings relativiert sich die erkenntnistheoretische Stellung der Anschauung durch die sich im 20. Jahrhundert immer mehr herausschälende Einsicht, dass *Mathematik in ihrem Kern abstraktes Wissen* ist. So meint A. N. WHITEHEAD: „Das Wesentliche an der Mathematik ist, daß wir uns in ihr immer vom besonderen Beispiel und sogar von den einzelnen Arten von Dingen entledigt haben“ (*Wissenschaft und moderne Welt*, Zürich 1949).

Abstraktion ist ein zentrales Instrument mathematischer Erkenntnis, das gerade durch die mit seiner Hilfe vollzogene *Distanzierung* vielfältig anwendbare Theorien entstehen lässt. Dazu gesellen sich aber auch andere Arten von Handlungen, die eine konstitutive Rolle im mathematischen Erkenntnisprozess spielen: das Eindeutig-Machen (Desambiguierung), die Reinigung (Purifikation der Anschauung), das Aufstellen von Forderungen (Idealisierung), die Formalisierung (Beschreiben in symbolischer Sprache), die Systematisierung (Beweisen, Vereinheitlichen durch Systembildung) – wenn man so will: alle Zutaten, die für Enttäu schung im doppelten Wortsinn sorgen.

Axiomatische Methode, Formalismus und CANTORs Paradies

HILBERT hat die axiomatische Methode zu dem geschmeidigen und erfolgreichen Werkzeug gemacht, das sie bis heute geblieben ist. Der Grundgedanke ist einfach, auch wenn er sich im Einzelfall erst nach oft langen und mühevollen Vorarbeiten umsetzen lässt:

1. Man legt bestimmte Begriffe als *Grundbegriffe* fest, die undefiniert bleiben, und führt alle anderen Begriffe auf die Grundbegriffe zurück.
2. Man legt bestimmte Aussagen als *Axiome* fest, die unbewiesen bleiben, und leitet alle anderen Aussagen aus den Axiomen her.

Grundbegriffe und Axiome haben nun jede Emphase verloren: In einem Grundbegriff zeigt sich nicht mehr das „Wesen" einer Sache, und Axiome müssen nicht mehr „evident" sein. Die einzige Forderung, die HILBERT an ein Axiomensystem richtet, ist die Widerspruchsfreiheit.

Die Geometrie ist eine axiomatische Theorie *par excellence*. Daran erinnert der alte Ausdruck „more geometrico", der sich verallgemeinernd auf jedes axiomatische Vorgehen nach dem Vorbild der Geometrie bezieht. Eben dies wollte HILBERT: die axiomatische Methode auf alle Wissensbereiche anwenden, z.B. auch auf die Mechanik und andere Gebiete der Physik.

Bis etwa zu den 1920er-Jahren gab es neben der Geometrie eine Reihe weiterer axiomatischer Ansätze in der Mathematik, z.B. die *Principia Mathematica* (Mathematik als System der Klassenlogik: RUSSELL und WHITEHEAD), die Arithmetik (PEANO, aber auch Teile der *Principia Mathematica*), die Mengenlehre (ZERMELO, FRAENKEL, VON NEUMANN).

Man wundert sich zunächst darüber, dass es sinnvoll sein soll, die Arithmetik (Lehre von den Zahlen, insbesondere den natürlichen Zahlen 0,1,2,3,...) zu axiomatisieren. Sind die natürlichen Zahlen nicht das Einfachste und Klarste, was die Mathematik zu bieten hat? Dem Mathematiker L. KRONECKER wird der Ausspruch zugeschrieben: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

Tatsächlich stellt die Axiomatisierung der Arithmetik eine theoretisch interessante Aufgabe dar. Dies hängt mit dem Induktionsprinzip zusammen (auch bekannt als Methode der „vollständigen Induktion"), das bei Aussagen verwendet wird, deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden soll. Es zeigt sich, dass sich die Induktion nicht durch ein einzelnes Axiom symbolisieren lässt, es sei denn, man erlaubt in den Sprachmitteln den Bezug (nicht nur auf Zahlen, sondern – auf der sog. zweiten Stufe – auch) auf *Eigenschaften* bzw. *Mengen* von Zahlen. Dies hat dann sogar den Vorteil, dass das Axiomensystem seinen Erfüllungsbereich (= semantisches Modell) bis auf Isomorphie eindeutig festlegt. Der Nachteil der zweiten Stufe: Es steht kein effektiver, d.h. durch ein Regelsystem beschreibbarer Folgerungsbegriff zu Verfügung. – So wie HILBERT sein formalistisches Programm verstanden haben wollte, ist diese Option unakzeptabel.

Auch die Mengenlehre wurde erst spät axiomatisiert. Wie bei der Arithmetik ist man genötigt ein *unendliches* Axiomensystem aufzustellen, d.h. endlich viele Axiome plus mindestens ein sog. Axiomenschema, in das beliebige einschlägige Formeln (erster Stufe) eingesetzt werden können. Die mathematische Grundlagenforschung, die sich mit diesen Fragen beschäftigt, hat der Mengenlehre eine ausgezeichnete Stellung eingeräumt. Der Grund dafür liegt in der Möglichkeit, eine Theorie auf eine andere zurückzuführen: Die Geometrie kann auf die Arithmetik zurückgeführt werden. Die Arithmetik (und die Analysis) kann auf die Mengenlehre zurückgeführt werden.

Lässt sich sagen, was eine Menge ist? GEORG CANTOR, der Begründer der Mengenlehre in ihrer „naiven“ (nicht-axiomatisierten) Gestalt, hatte anfänglich essentialistische Begriffsbestimmungen versucht, etwa der Art: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens zu einem Ganzen“. Doch aus späterer Zeit berichtet eine Anekdote von einer Unterhaltung zwischen CANTOR und DEDEKIND, in der beide über ihr intuitives Verständnis von Mengen gesprochen haben. DEDEKIND meinte, er stelle sich eine Menge wie einen Sack mit Dingen darin vor. Daraufhin soll CANTOR sich erhoben haben mit der pathetisch ausgebrachten Bemerkung, eine Menge sei für ihn ein Abgrund.

Vielleicht gilt ähnliches für die ganze Mathematik: Je mehr wir uns ihren Gründen nähern, desto mehr erweisen sich diese als wahre Abgründe.

Um nicht in die Abgründe der Mathematik schauen zu müssen, hatte HILBERT sich das folgende *formalistische Rechtfertigungsprogramm* überlegt: Die gesamte Mathematik (etwa in Gestalt einer hinlänglich starken Theorie wie der Mengenlehre, auf die sich „alles Übrige“ zurückführen lässt) wird der axiomatischen Methode unterworfen, d.h. durch ein Axiomensystem (mit undefinierten Grundbegriffen und unbewiesenen Axiomen) *in nuce* dargestellt. Dieses axiomatische Gesamtsystem der Mathematik wird konsequent formalisiert, genauer: in der Sprache der elementaren Prädikatenlogik (erster Stufe) wiedergegeben, für die seit der Wende zum 20. Jahrhundert ein vollständiges und effektives System von Ableitungsregeln (zur Gewinnung aller Folgerungen aus den Axiomen) verfügbar ist. Alle philosophischen oder sonstigen von außen an die Mathematik herangetragenen Fragen werden in einer sog. Metamathematik behandelt, d.i. ein inhaltlich aufgefasster (gleichsam residualer) Teil der Mathematik, dessen Gegenstand das zuvor hergestellte semiotische Abbild der „klassischen“ Mathematik ist. Die einzige noch zulässige, aber auch entscheidende Rechtfertigungsfrage ist die nach der Widerspruchsfreiheit des Gesamtsystems. Die Beweistheorie hat die Aufgabe, diesen Nachweis der Widerspruchsfreiheit zu erbringen.

Während CANTOR selbst sich im platonischen Himmel heimisch gefühlt haben dürfte, ist „CANTORs Paradies“, das HILBERT so nennt, ein virtuelles Gehege für die gesamte klassische Mathematik – virtuell, weil wir es lediglich mit einem semiotischen Abbild zu tun haben: Über die realen Zeichen kann man sich verständigen, das Abgebildete jedoch, d.h. „die Mathematik“ selbst, bleibt dem allgemeinen Diskurs entzogen.

Diese zugespitzte Grundlagendoktrin, die HILBERT mit seiner Metamathematik verband, scheiterte, wie wir sehen werden, gleich mehrfach. Sie ist jedoch nicht ineins zu setzen mit der formal-axiomatischen Methode, die nicht davon abhängt, dass „die Mathematik“ als ein monolithisches Gesamtsystem formalisierbar ist.

Vertreibung aus dem Paradies

Die berühmten Unvollständigkeitssätze, die KURT GÖDEL 1931 veröffentlichte, bedeuteten zunächst einmal, dass HILBERTs Rechtfertigungsprogramm in seiner ursprünglichen Form nicht aufrechtzuerhalten war. Das zweite dieser Resultate besagt nämlich: Die Widerspruchsfreiheit eines hinreichend ausdrucksstarken Systems S (wie Arithmetik oder Mengenlehre) kann nicht mit den Mitteln von S bewiesen werden. Eine Möglichkeit, dies etwa für die Arithmetik (oder die Analysis) zu umgehen, besteht darin, die Widerspruchsfreiheit in einer stärkeren Metatheorie nachzuweisen, die sich dennoch inhaltlich rechtfertigen lässt (etwa aufgrund ihrer Konstruktivität, so 1936 geschehen durch G. GENTZEN). Und schließlich: Abgesehen von der Frage, ob ein Widerspruchsfreiheitsbeweis möglich ist, bleibt immer noch das *Problem seiner Sinnhaftigkeit*: Was würde es am Ende bedeuten, wenn man ein Axiomensystem als konsistent nachgewiesen hat? (vgl. dazu A. SCHREIBER: *Theorie und Rechtfertigung*.

Braunschweig 1975) – Was wäre, umgekehrt, eigentlich so schlimm daran, einen Widerspruch abzuleiten? Man könnte so argumentieren: Mit der Zeichenreihe $0 \neq 0$ sind alle Formeln beweisbar, und damit würde die Analogie (!) zu einer inhaltlichen Theorie zerstört, in der man zwischen Wahr und Falsch unterscheiden kann. Es gäbe dann nicht einmal die *logische* Möglichkeit einer solchen Theorie. Das scheint für HILBERT schwerer zu wiegen als der Mathematik ihre Inhaltlichkeit abzusprechen.

Die formalistische Axiomatik hat ihre ganz spezifischen Monster: sogenannte Non-Standard-Theorien. Man darf sich das ungefähr so vorstellen: Mit einer formalisierten Theorie (wie der euklidischen Geometrie, Arithmetik oder Mengenlehre) sollen durch die Axiome die Grundbegriffe in ihrem wechselseitig verflochtenen Gebrauch so festgelegt werden, dass – abgesehen von Umbenennungen der zugehörigen Objekte – nur *ein* Erfüllungsbereich (semantisches Modell) möglich ist, in dem sämtliche Axiome (und damit auch alle logischen Folgerungen aus ihnen) gültig sind. Eine solche Theorie heißt kategorisch.

Auch in dieser Hinsicht erleidet das formalistische Wissenschaftskonzept der Mathematik eine gewisse Enttäuschung und Einschränkung. Schon seit den Untersuchungen von LÖWENHEIM und SKOLEM (in den 1920er Jahren) weiß man, dass Arithmetik und Mengenlehre in ihren Formalisierungen erster Stufe nicht-kategorisch sind, d.h. die Erfüllung in Bereichen erlauben, deren Struktur und Eigenarten als Nicht-Standard (weil „ursprünglich so nicht gemeint") anzusehen sind.

In der axiomatischen Mengenlehre ergibt sich dabei eine paradox anmutende Situation. CANTORs klassische Theorie war ursprünglich angetreten, unendliche „Mannigfaltigkeiten" zu erforschen und darzutun, in welcher bis dahin für nicht möglich gehaltenen Differenzierung das Unendliche sich entfaltet. Aus dem einfachen Zählprozess 0, 1, 2, 3, ... ist uns das sog. abzählbar Unendliche vertraut (hier aktual, d.h. als abgeschlossene Gesamtheit aufgefasst). Das Kontinuum, etwa in Gestalt einer aus Punkten zusammengesetzt gedachten Strecke, ist hingegen nicht-abzählbar (überabzählbar). Darüber hinaus potenzieren sich (im wahrsten Sinn des Wortes) diese sog. Mächtigkeiten dadurch, dass man von einer Menge zu der Menge ihrer Teilmengen, der sog. Potenzmenge mit nachweislich höherer Mächtigkeit, übergeht. Tatsächlich ist es (mit einigen Abstrichen zur Vermeidung von Widersprüchen) möglich, den soweit skizzierten Bestand der Mengenlehre in eine axiomatische Form zu gießen. Die dabei benutzte Formalsprache kommt mit abzählbar vielen Symbolen aus. SKOLEM hat nun gezeigt, dass das Axiomensystem der Mengenlehre, wenn es überhaupt erfüllbar ist, sogar einen abzählbaren (!) Erfüllungsbereich besitzt. Damit tritt eine merkwürdige *Relativität der mengentheoretischen Begriffe* zutage. Zum einen wird *innerhalb* der Theorie von überabzählbaren Mengen gesprochen; zum anderen entsprechen den Elementen dieser überabzählbaren Mengen *außerhalb*, d.h. im Erfüllungsbereich, Elemente einer abzählbaren Gesamtheit. Ein Begriff wie „abzählbar" kann demnach keine absolute Bedeutung haben.

Zurück zu den Inhalten?

Während des gesamten 20. Jahrhunderts haben einzelne Mathematiker und Philosophen mehr oder weniger entschlossen versucht, der fortschreitenden Sinnentleerung der Mathematik, die ihr durch die formalistische Axiomatik und die mit ihr verbundene Distanzierung von einer wie auch immer beschaffenen Wirklichkeit drohte, Einhalt zu gebieten. Der Höhepunkt dieser Gegenwehr kann als eine konstruktivistische Doktrin angesehen werden, die über fünf oder sechs Dekaden die Erkenntnistheorie der Mathematik, aber auch die Mathematik selbst beeinflusst hat.

Die Doktrin ist fundamentalistisch in folgendem Sinne: Sie geht davon aus, dass es

Grundlagen der Mathematik gibt, die in bestimmter Weise zu sichern sind bzw. den Aufbau der Mathematik gewährleisten – als Ausgangspunkt bzw. Quelle mathematischer Erkenntnis. Sie ist aber auch essentialistisch, d.h. sie glaubt die als grundlegend erachteten Dinge und Sachverhalte in ihrem Wesenszusammenhang ausmachen zu können: im Feld einer unmittelbaren Anschauung oder eines Systems von Operationen oder Konstruktionen.

Werfen wir nun einen Blick auf einige markante Entwürfe, die im Rahmen dieser Doktrin unternommen wurden.

LUITZEN E. J. BROUWER: Intuitionismus

Der revolutionärste Beitrag dieser „Gegenmoderne“ stammt von dem bedeutenden niederländischen Mathematiker (und Philosophen) BROUWER. Die Basis seiner intuitionistischen Mathematik hat er bereits in seiner Dissertation *Over de grondslagen der wiskunde* (1907) gelegt. Eine Philosophie, welche die Mathematik von außen betrachtet, kann es für Brouwer nicht geben. Vielmehr führt er die Revision der Grundlagen dahin, die Mathematik mit abgeänderten Regeln – zumeist Einschränkungen, von HILBERT als „Verbotsdiktatur“ geschmäht – neu aufzubauen. Begriffe wie „Kontinuum“, „Funktion“ und „Stetigkeit“ haben in dieser intuitionistischen Mathematik eine völlig andere Bedeutung als in der klassischen Mathematik (BROUWER würde sagen, dass sie nun überhaupt erst eine Bedeutung haben). Zum Beispiel gilt in der intuitionistischen Funktionenlehre der folgende Satz, der jedem herkömmlich ausgebildeten Mathematiker erstaunlich vorkommen dürfte: Jede in einem abgeschlossenen Intervall überall definierte Funktion ist in diesem Intervall gleichmäßig stetig.

BROUWERS Ansatz lässt sich grob durch folgende Leitgedanken kennzeichnen: Aktualunendliche Gesamtheiten, von denen die CANTORsche Mengenlehre reichlich Gebrauch macht, werden als Gegenstände der Mathematik nicht anerkannt. Das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten (Tertium non datur) wird nur auf endliche Gesamtheiten angewendet. Grundlage jeder Mengenbildung ist die (zeitgebundene) Ur-Intuition des Zählens (durch Einführung sogenannter Wahlfolgen für die Konstruktion des Kontinuums umgesetzt). Die mathematische Anschauung ist eine unmittelbare Erkenntnis, die nicht durch Sprache vermittelt wird. Mathematik ist von der Sprache prinzipiell unabhängig.

BROUWER hat einen Großteil seines Lebenswerks dem Aufbau einer intuitionistischen Zahlenlehre und Mengenlehre (als Grundlage der Analysis) gewidmet. Bedingt durch die Kritik am Tertium non datur entwickelt der Intuitionismus auch eine abgewandelte Logik.

HUGO DINGLER: Operativismus

DINGLERS philosophisches Interesse galt vor allem dem methodischen Aufbau der Naturwissenschaften. Durch Fundierung auf Handlungen (Operationen, Konstruktionen) werden die begrifflichen Schemata der Wissenschaft auf die Realität bezogen. In zahlreichen Studien widmet sich DINGLER dem Aufbau und der inhaltlichen Deutung der Geometrie. Sein 1933 erschienenes Werk *Die Grundlagen der Geometrie* spielt dabei schon im Titel auf die HILBERTsche Axiomatik an, der DINGLER in seinem Verständnis von „Grundlagen“ nicht folgt. Tatsächlich fasst DINGLER die Geometrie und ihre Grundbegriffe nicht formal auf, sondern als einen apriorischen Teil der Physik (vergleichbar dem Versuch KANTS in seinen *Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft* von 1786).

Die Idee seines Vorgehens ist diese: Bestimmte Grundbegriffe wie Punkt, Gerade, Ebene sind als ideenhafte (normative) Ziele einzuführen, die technischen Operationen zugeordnet sind. Ebene Flächen denkt sich DINGLER durch ein wechselseitiges Aneinanderschleifen drei er Platten realisiert (Dreiplattenverfahren). Schnittkanten ebener Flächen sind dann Realisate von Geraden und Schnittecken gerader Kanten Realisate von Punkten. Immerhin hat man damit eine Art *Urzeugung von Formen*, die sich als gegenständliches Substrat den Begriffen der Geometrie unterlegen lassen. Auch rechte Winkel und Parallelität (als die Eigenschaft eines Ebenenpaars, eine bestimmte Ebene im rechten Winkel zu schneiden) kann man auf diese Art gewinnen.

DINGLER glaubte fest daran, die von ihm beschriebenen formerzeugenden Handlungen („in den Fabriken") erzwängen die Geltung der euklidischen Geometrie im Realraum und widerlegten damit insbesondere EINSTEINS Allgemeine Relativitätstheorie. Er übersah dabei, dass seine Formen-Herstellung nur lokal, d.h. in kleinen Raumgebieten, stattfinden kann und damit über die geometrische Struktur des Universums im Ganzen noch nichts entschieden ist. Es ist selbstredend ausgeschlossen, eine Ebene oder Gerade als unendlich ausgedehntes Gebilde im Sinne der euklidischen Geometrie zu fertigen.

Nichtsdestoweniger ist der Ansatz interessant. Bis zu einem gewissen Grade mag er als Antwort gelten auf die Frage nach der „prästabilierten Harmonie", d.h. der Frage, weshalb mathematische (geometrische) Begriffe und Theorien so gut auf die Wirklichkeit passen. Immerhin manipulieren wir über begriffliche Normung diese Wirklichkeit in gehörigem Maße. Ob dies allerdings soweit geht, dass wir der Natur ihre Gesetze vorschreiben können, bleibe einmal als zumindest sehr fraglich dahingestellt.

PAUL LORENZEN: Konstruktivismus

DINGLERS Methodologie, speziell die der Geometrie, wurde später von LORENZEN und seiner „Erlanger Schule" aufgegriffen und auf verschiedene Weise zu präzisieren versucht. (Für eine kritische Darstellung und didaktische Umdeutung dieser Teilansätze vgl. man P. BENDER und A. SCHREIBER: *Operative Genese der Geometrie*, Wien/Stuttgart 1985.) Die Beiträge LORENZENS zum Konstruktivismus gelten daneben aber auch dem Aufbau der Logik, Arithmetik und Analysis. Hier steht das konstruktive Handeln in und mit Kalkülen im Vordergrund. In seiner *Metamathematik* (1962) sucht LORENZEN einen Standpunkt, der zwischen Formalismus („Axiomatizismus") und Konstruktivismus vermittelt. In *Differential und Integral* (1965) geht es darum, die klassische Analysis als eine konstruktive Theorie aufzubauen. Der Ansatz der dialogischen Logik schließlich (z.B. in dem mit W. KAMLAH gemeinsam verfassten Werk über *Logische Propädeutik* von 1967) hat mit seiner methodischen Einführung in das logische Sprechen und in die effektive Logik auch weitere philosophische Kreise erreicht.

Die logische Propädeutik heißt im Untertitel *Vorschule des vernünftigen Redens* und verweist damit auf etwas für die Erlanger Schule Typisches: den Anspruch, der Wissenschaft einen konstruktiv bzw. operativ geprägten Vorbereich zu sichern (womit an DINGLER und KANT angeknüpft wird). Zu diesen Proto-Wissenschaften gehören z.B. Protogeometrie, Chronometrie und Hylometrie.

Die Aufsatzsammlung *Methodisches Denken* (1968) gibt dazu einen programmatischen Überblick, führt dann aber in den „Grundlagenstreit der Mathematiker" auch „moralische Argumentationen" ein. In der Forschung tätige Mathematiker, die mit voller Absicht oder nur aus „Gewohnheit" die klassischen Formalismen verwenden, die ein Konstruktivist als *sinnlos* ablehnen würde, werden eindringlich aufgefordert sich zu *rechtfertigen*. Vermeintliche Rechtfertigungsgründe der „Formalisten" – LORENZEN konzentriert sich auf Gewohnheit, Notwendigkeit, Schönheit und Freude – werden einer scharfen normativen Kritik unterzogen und zurückgewiesen. Gewohnheit gibt keinen „Rechtsgrund" her, sondern fußt nur auf der Macht des Faktischen. Notwendigkeit liegt nach LORENZEN auch nicht vor, weil seitens der Formalisten noch nicht dargelegt wurde, welche Formalismen (die etwa in der Physik Verwendung finden) unentbehrlich sind und nicht durch konstruktive Verfahren ersetzt werden könnten. Schönheit anzuführen verwischt die Grenze zwischen Wissenschaft und Kunst, ist subjektiv, ist zudem Moden unterworfen und allenfalls als zusätzliche (nicht jedoch einzige) Rechtfertigung zu gebrauchen. Dass Mathematiker Freude an der klassischen Mathematik, mehr als an der konstruktivistischen, empfinden, rekurriert nur auf das Privatvergnügen einer Minderheit oder geht, bei Beanspruchung öffentlichen Interesses, an dem vorbei, was den meisten Menschen Freude bereitet. LORENZEN meint sogar: „Wäre es im öffentlichen Interesse nicht besser, die Parfumherstellung zu fördern als die formalistische Mathematik, da doch viel mehr Leute Freude an schönen Gerüchen als an schönen Formalismen haben?“ (*Methodisches Denken*, S. 160)

Misserfolge

Hat sich die konstruktivistische Doktrin in ihren diversen Ausprägungen durchgesetzt? Diese Frage kann man nur mit Nein beantworten. Gleichwohl hat die Mathematik und vor allem die mathematische Grundlagenforschung viele Anregungen erhalten. So schmerzlich dies aus konstruktivistischer Sicht auch erscheinen mag, es haben vor allem solche Vorschläge Beachtung gefunden, die sich auch in herkömmliche Mathematik haben umsetzen lassen. So wurde der Intuitionismus von der Fachwelt erst verstanden und wahrgenommen, nachdem AREND HEYTING, der wichtigste Schüler BROUWERs, die intuitionistischen Ideen in eine formal-axiomatische Gestalt gebracht hatte. Zudem ist vielen Fachvertretern nur schwer zu vermitteln, weshalb sie ein Theorem, das sich „klassisch“ ganz einfach beweisen lässt, nun plötzlich durch komplizierte konstruktivistisch annehmbare Methoden sichern sollten. Auch wenn HILBERTs Position erkenntnistheoretisch nicht sonderlich stringent ist, so hat sie sich in der Praxis und in der Politik der Wissenschaft am Ende doch durchgesetzt. HILBERT und BROUWER, zu ihrer Zeit unerbittliche Widersacher, stimmen doch darin überein, dass die Mathematik mit dem exakten Teil unseres Denkens identisch ist. Die immer wieder zu erlebende Enttäuschung für alle, die sich der Mathematik von der philosophischen Warte aus nähern, ist am Ende das Erfordernis, ihre Ideen durch Exaktifizierung – und das heißt oft: Formalisierung – verständlich zu machen, zumindest wenn sie von der institutionalisierten Mathematik rezipiert und beachtet werden sollen.

Nicht wenige Ursachen für den Misserfolg der konstruktivistischen Doktrin sind allerdings hausgemacht. Zum einen war, besonders in den Anfängen, die Ausarbeitung der Grundgedanken nicht eben leicht verständlich. Die Explizierung in formalen Termini ist schließlich im Intuitionismus gelungen und BROUWERs überragender Beitrag zu den Grundlagen der Mathematik weltweit anerkannt. Gleichwohl war und ist es eine ungünstige Ausgangslage, wenn einerseits beansprucht wird, man habe ein Mittel, die Mathematik als sinnhafte Rede (über etwas) zu rekonstruieren, ja überhaupt erst verstehbar zu machen, andererseits aber eben diese Rekonstruktion nicht in völliger Klarheit vollzogen wird und kompliziertere Gedankengänge erzwingt.

Die immanenten Defizite der DINGLERschen und dann der prototheoretischen Ansätze LORENZENs wurden von der Erlanger Schule lange Zeit nicht thematisiert, nicht selten verschleiert oder gar durch eine nach außen getragene Apodiktizität überspielt. Dies hat der Sache letztlich nicht genützt (vgl. z.B. die 1998 erschienene Konstanzer Dissertation L. AMIRAS: *Protogeometrica* mit ihrer ins Detail gehenden Kritik der gesamten „protophysikalischen Geometriebegründung“). Auch der hohe moralische Ton, in dem ein Verfügungsanspruch auf normative Rationalität geltend gemacht wurde, hat sich auf die Rezeption der LORENZENschen Philosophie ungünstig ausgewirkt.

BROUWER und DINGLER waren beide Einzelgänger, ja Sonderlinge. Eine „Schule" haben sie nicht bilden können oder wollen. BROUWER, der asketisch und zurückgezogen lebte, galt in seinem Auftreten als missionarisch und allzu selbstbewusst. Für ihn war Mathematik eine Geisteshaltung, in die man sich einzuleben hatte. Daran ist, wie jeder Kundige weiß, viel Wahres daran. Andererseits braucht die Mathematik aber auch den lebendigen, kritischen Diskurs, und der wird über Sprache und Begrifflichkeit vermittelt und in Gang gehalten.

Anschauung und Diskurs

BROUWER versteht Intuition nicht als sinnliche, sondern als eine von kontingenten Bestandteilen (etwa der Wahrnehmung) gereinigte Anschauung, darin der reinen Anschauung (von Zeit), die KANT in seiner Ästhetik namhaft gemacht hat, verwandt. Im Intuitionismus ist diese Anschauung allerdings eine Quelle *unmittelbarer* (begriffsloser) Erkenntnis, mithin etwas, das KANT als „intellektuelle" Anschauung abgelehnt hätte.

Sich auf die Anschauung als *Erkenntnisquelle* zu berufen, bedeutet, dass ich ein singuläres intentionales Evidenzerlebnis eines anderen nachvollziehe (nachvollziehen *muss*, wenn ich die behauptete Erkenntnis mit ihm teilen möchte). Das mag, bei moderatem Gebrauch, noch angehen und ist in einem gewissen Sinn sogar unvermeidlich. In gesteigerter Form wird die Berufung auf Anschauung aber leicht zur Sache von Visionären, autoritären Wahrheitsverkündern und Hohepriestern. Bei KANT heißt so etwas vornehm „vornehme Philosophie". Dagegen stellt ein *Beweis* sich erst einmal der Überprüfung, der Kritik, dem öffentlichen Diskurs. Äußeres Anzeichen dafür ist allein schon seine sprachliche und begriffsgebundene Form. Ein Beweis ist in dem Sinn demokratisch, dass er sich prinzipiell allen, die am Erkenntnisprozess beteiligt sein wollen, mitteilt; er löst für die Allgemeinheit das Recht ein auf Einsichtnahme und Einsicht, auf verstehenden Nachvollzug des Verstehbaren.

Natürlich trifft dieser Hinweis die intuitionistische oder konstruktivistische Mathematik nicht in dem Sinn, dass man dort etwa auf Beweise glaubt verzichten zu können. Im Gegenteil, es geht ja um Axiome (und Grundbegriffe), deren inhaltliche Begründung gerade der Formalismus ausspart. In dieses Vakuum können fundamentalistische Auffassungen eingreifen. Die Frage ist, ob dies dogmatisch geschieht. Tatsächlich haben wir nicht nur eine, sondern eine Vielzahl konkurrierender Sichtweisen, die als solche unverbindlich bleiben. Die Unverbindlichkeit mag den überzeugten Konstruktivisten ärgern, doch ist sie unvermeidlich und in meinen Augen eine Stärke. Das „Zwingende", die „Härte" mathematischer Schlüsse und Theoreme werden auf diesem Feld eben nicht erreicht, sondern nur da, wo wir formalisieren und beweisen. Gibt es etwa einen Grund, der es rechtfertigen würde, Andersmeinende, Skeptiker oder Agnostiker zu einer ganz bestimmten Auffassung zu zwingen?

Der inwendige und appellative Charakter der Anschauung macht sie darüberhinaus ambivalent, im Extremfall sogar anfällig für Missbrauch. Dies gilt besonders dann, wenn man sie dazu benutzt, sich emphatisch gegen angeblich trockene Abstraktion und dürren Formalismus abzugrenzen. Schlimmstenfalls verkommt die Berufung auf Anschauung – wie im Dritten Reich geschehen – zu einem ideologischen (z.B. rassistisch verquasten) Eigentlichkeitsjargon. Wenn Nationalsozialisten „Formalismus" sagten, meinten sie „jüdisch", „lebensfern", „degeneriert" und damit – horribile dictu – echtem Deutschtum entgegengesetzt, das angeblich in der Anschauung wurzelt. Ein Beispiel liefert der bekannte Mathematiker L. BIEBERBACH. Schon 1926 griff er in einer Rede über das Wissenschaftsideal der Mathematiker den Formalismus polemisch an und lobte die „anschauliche Gegenständlichkeit" der Mathematik FELIX

KLEINs. Im Jahre 1934 erschien dann in Band 40 der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften ein Artikel, in dem es (wiederum unter Bezug auf KLEIN) heißt: „So denkt ein deutscher Geist, der zum Sehen geboren, zum Schauen bestellt, der klaren Stimme seiner Sinne traut und für wahr nimmt, was klarer Überlegung standhält“ (zitiert nach H. MEHRTENS: *Moderne – Sprache – Mathematik.* Frankfurt/M. 1990, Kap. 4).

In der Mathematik werden anschauliche Vorstellungen, vor allem aber konstruktive Verfahren (aus guten Gründen) allgemein geschätzt. Konstruktive Erkenntnisse haben einen höheren Informationsgehalt. Ein Verfahren, mit dem sich die Lösungen einer Gleichung berechnen lassen, enthält mehr Information als die bloße Existenzaussage, dass die betreffende Gleichung lösbar sei. Daneben bleiben der Anschauung, je nach Praxiszusammenhang, noch eine Reihe residualer Funktionen.

In Forschungsprozessen spielt die Anschauung nach wie vor eine heuristische (und damit erkenntnisleitende) Rolle. In Lernprozessen übernimmt sie zusätzlich eine Funktion als Verständnishilfe und Plausibilisierungsmittel.

Der Aufbau formaler Kalküle (Systeme) verlangt grundlegende und nicht-eliminierbare semiotisch-arithmetische Evidenzen, die konstruktiv zu verstehen sind. Sie betreffen nämlich das Hantieren mit Zeichenreihen, den induktiven Aufbau von Termen und Formeln sowie das mathematische Erfassen auch infiniter Sachverhalte (z.B. der Tatsache, dass jede Formel einen Term enthält, und dgl. mehr).

Modellkonstruktionen, wie sie heute in mathematischen Anwendungen entwickelt werden, nutzen eine pragmatische Form von Anschaulichkeit. Diese beruht auf einem empirischen Verständnis, das zugleich begrenzt ist durch das „aufgeklärte“ Bewusstsein der Vorläufigkeit und Zweckgebundenheit im ökonomischen Verwertungszusammenhang. Modelle sind sozusagen im Nebeneffekt anschaulich; in erster Linie sind sie Hypothesenkomplexe, die in der Praxis getestet werden.

Auch bei formaler Hochzüchtung mathematischer Techniken oder weitreichenden Abstraktionen spielen Anschauungsmomente – wieder – eine Rolle, meist als eine das Denken begleitende private Bildsprache, die sich durch den längeren und intensiven Umgang mit mathematischen Begriffen und Theorien entwickelt. Wenn man sich in ein System vertieft, sich auf seine Begriffsbildungen und Denkweisen einlässt, entsteht am Ende eine Art Vertrautheit, ja Selbstverständlichkeit. Ist es die „Erfahrung des Gelingens“, von der PAUL BERNAYS einmal gesprochen hat, oder einfach nur die allmähliche Gewöhnung an einen bestimmten Geisteszustand? Mathematiker wissen, dass man „in einer Sache drin sein“ muss.

Das indische Mathematikgenie RAMANUJAN ist ein Beispiel dafür, wie weit sich solche Intuitionen entwickeln lassen. Es klingt vielleicht ein wenig simpel, wenn man sagt, RAMANUJAN habe „auf Du und Du“ mit den Zahlen gestanden. Andererseits ist es aber sehr viel, wenn man so etwas von jemandem behaupten kann. Von RAMANUJAN selbst ist übrigens die Bemerkung überliefert: „Eine Gleichung hat für mich keine Bedeutung, wenn sie nicht einen göttlichen Gedanken ausdrückt.“ – Er wird dabei kaum auf PLATONs Ideenreich angespielt haben. Schließlich gibt es das Göttliche auch anderswo, und vermutlich sucht mehr als eine Mathematikerseele danach, selbst die von Formalisten. Unverträglichkeiten und Nebenwirkungen sind nicht bekannt.