

# Übungen zu "Modellbildung / Simulation"

## Blatt 5

### Aufgabe 13:

#### Tourismus und Umwelt

---

Eine Gegend mit hoher Umweltqualität  $y$  zieht viele Touristen an. Macht man Werbung, etwa mit dem Aufwand  $b$ , so nimmt die Touristenpopulation  $x$  zusätzlich um  $b \cdot y$  zu. Andererseits vermindert sie sich durch abreisende Touristen ständig (mit Verlustrate  $a$ ). Ist  $x'$  die Anzahl touristischer Besucher im Folgejahr, so wird der Sachzusammenhang durch die Modellgleichung beschrieben:  $x' - x = -a x + b y$ .

Der Tourismus beeinträchtigt die Umwelt auf vielfältige Weise, und zwar mit einer spezifischen Belastungsrate  $c$  direkt proportional zur Anzahl  $x$  der Touristen sowie zur Qualität  $y$  der Umwelt selbst. Alleingelassen, würde die Umwelt sich allmählich wieder bis zu einer bestimmten Grenze  $k$  mit einer spezifischen Regenerationsrate  $d$  erholen. Zusammenfassend beschreibt dies die Modellgleichung:  $y' - y = d y (k - y) - c x y$ .

a) Man erörtere die beiden Modellgleichungen im Detail. Vgl. dazu auch die Quelle: Bossel 1992, M 209 (Seite 292).

b) Setzen Sie das Modell (unter Verwendung von DYNASYS) praktisch um.

c) Untersuchen Sie experimentell die Entwicklungsdynamik des Modells für verschiedene Wertbelegungen der System-Parameter, z.B. für  $a = c = d = 0.1$ ,  $k = 1$  und  $b = 0.5$  (sowie den Anfangswerten  $x_0 = 0.1$ ,  $y_0 = 1$ ).

Finden Sie heraus, welchen Einfluss die Werbung auf die Umweltentwicklung hat! Wie wirken sich Veränderungen von  $k$  auf die Systemdynamik aus?

### Aufgabe 14:

#### Masernepidemien

---

Masern sind höchst ansteckend und werden durch Viren übertragen. Vor allem kommt es zur Übertragung beim Kontakt eines infektiösen Kindes mit einem empfänglichen (noch nicht infizierten) Kind. Während einer einwöchigen latenten Periode (Inkubationszeit) kann das neu infizierte Kind keine anderen Kinder anstecken, danach aber wohl, und zwar für die Dauer einer Woche. Erst dann erscheinen die typischen roten Pusteln, und das Kind erholt sich wieder.

Es soll ein Modell (dynamisches System) mit dem Bestand  $x$  infektiöser Kinder und dem Bestand  $y$  empfänglicher (nicht-infizierter) Kinder als Zustandsgrößen entwickelt werden. Diese Bestände bilden Teilpopulationen einer englischen Stadt mit ca. 30000 Kindern. Vereinfachend sei angenommen, dass Ansteckungen nur an Wochenenden stattfinden (und somit  $x$  und  $y$  die darauf folgende Woche unverändert bleiben).

Zwei System-Parameter sind zu berücksichtigen und aus statistischem Material zu erheben: Die Geburtenanzahl  $b$  pro Woche (hier:  $b = 120$ ) sowie der konstante Bruchteil  $f$  aller empfänglichen Kinder, der von einem infektiösen Kind angesteckt wird (hier:  $f = 0.00003$ , also ca. ein Kind pro Woche).

Zu den Modellgleichungen gelangt man durch folgende Überlegung: Die Anzahl  $x'$  infektiöser Kinder in einer Woche stimmt überein mit der Anzahl der empfänglichen Kinder, die sich in der vorangehenden Woche (am Wochenende) angesteckt haben. Bezeichnet  $y'$  die Anzahl der empfänglichen (nicht-infizierten) Kinder in einer Woche, so setzt sich  $y' + x'$  nach dem oben Gesagten offenbar aus den empfänglichen und den neugeborenen Kindern der vorangehenden Woche zusammen. [Quellenverweise zu diesem Modellbeispiel findet man bei Sonar 2001, S. 40 ff.]

a) Stellen Sie auf der Grundlage der obigen Angaben die beiden Modellgleichungen  $x' = \dots$ ,  $y' = \dots$  auf.

Hinweis: In beiden Gleichungen benötigen Sie die Anzahl der empfänglichen Kinder, die sich in der vorangehenden Woche angesteckt haben. Diese Anzahl ist direkt proportional zu  $x$  und  $y$  mit  $f$  als spezifischer Proportionalitätskonstanten (für den Ansteckungsgrad der Krankheit).

b) Setzen Sie das Modell (unter Verwendung von DYNASYS) praktisch um.

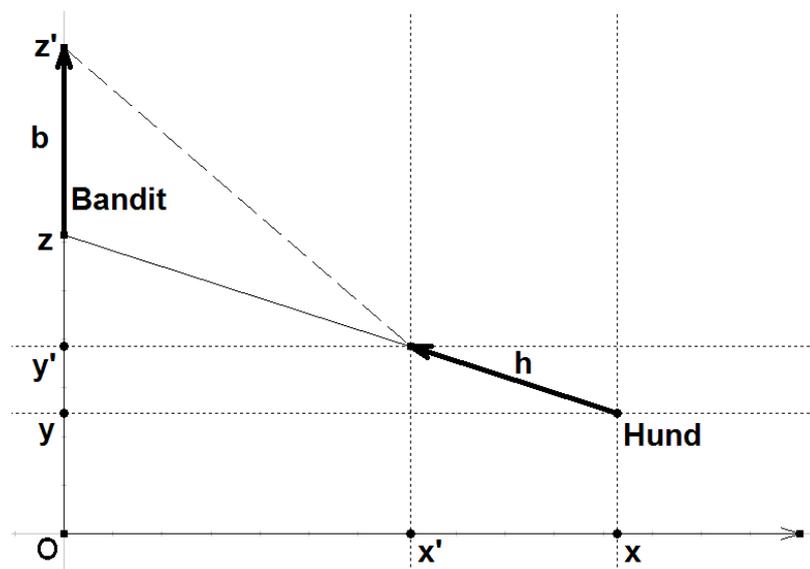
c) Starten Sie das System mit  $x_0 = 20$  infektiösen und  $y_0 = 30\,000$  empfänglichen Kindern. Beobachten und bewerten Sie die Trajektorien über längere Zeiträume (1, 2, 3 Jahre usw.).

d) Untersuchen Sie die Auswirkung der beiden System-Parameter (wöchentliche Geburtenrate, Ansteckungsgrad).

## Aufgabe 15:

### Bahn einer Verfolgung

Im Wilden Westen flieht ein Bandit (nennen wir ihn Bill) mit seiner Beute auf einer Draisine; das schnurgerade Schienengleis führt ihn nach Norden. Sein Verfolger (den wir Tom nennen wollen) ist ein um seinen Anteil geprellter Kumpel; der hat Bill's Draisine aus einiger Entfernung erkannt und hetzt nun, ebenso wütend wie ratlos, seinen Hund auf den flüchtigen Verräter. In seinem Jagdfieber peilt der Hund die Position der Draisine an, läuft dann (in einer Zeiteinheit) eine gerade Strecke  $h$  darauf zu, peilt dann wieder die Draisine an, usw. Bill legt auf seiner Fahrt nach Norden in einer Zeiteinheit die Strecke  $b$  zurück.



Das Geschehen bildet ein dynamisches System dadurch, dass Tom's Hund nach jeder verstrichenen Zeiteinheit seine Laufrichtung an das fliehende Gefährt anpasst; die zugehörige Trajektorie (Verfolgungskurve) besteht dabei aus den Punkten  $(x, y)$ , von denen aus er jedesmal ein Stückchen geradeaus läuft. Zustandsgrößen sind: die Koordinaten  $x, y$  des Hundes sowie die Position  $z$  der Draisine auf der  $y$ -Achse (siehe Abbildung):

- a) Stellen Sie geeignete Modellgleichungen auf, d.h. berechnen Sie  $x', y', z'$  aus den Werten  $x, y$  und  $z$ , welche für Tom's Hund bzw. den Banditen Bill in der unmittelbar vorangegangenen Zeiteinheit gültig waren.
- b) Zur praktischen Umsetzung des Modells können Sie (z.B. auf der Basis von `_muster3.html`) *vorzugsweise* eine individuell auf das Problem zugeschnittene Lösung entwickeln (nach dem Vorbild von B11 oder B12). Alternativ ist es möglich, das Modell mittels DYNASYS zu erstellen. Da sich jedoch damit *nur zwei* Zustandsgrößen verwalten lassen, muss  $z$  als zusätzlicher System-Parameter mitgeführt und (mit dem in B15 benutzten Kunstgriff) in einer globalen Variablen zwischengespeichert werden.
- c) Zu Beginn steht Bill mit seiner Draisine im Nullpunkt  $(0, 0)$ , Tom und sein Hund hingegen in  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ . Wählt man  $h$  und  $b$  hinreichend klein, so ergeben sich einigermaßen glatte Verfolgungskurven. Finden Sie das selber heraus und experimentieren Sie mit den Parametern und Startwerten.