

Mittelwerte

(Bezeichnungen, Definitionen, Lehrsätze der Kapitel 1-6)

Prof. Dr. Alfred Schreiber

1. Bedeutung und Aufgabe von Mittelwerten

■ 1.1. Mittelwerte im Alltag

Unterschiedliche Begriffe (Grundvorstellungen) von Mittelwerten

Mittelwert als Kennwert einer Stichprobe

■ 1.2. Beobachtungsgrößen, Merkmale und ihre Ausprägung

Eine Beobachtungsgröße (ein Merkmal) X kann wie folgt ausgeprägt sein:

- quantitativ (metrisch) → Maßskala
- ordinal → Rangskala
- nominal → Klassifikation

Merkmalwerte (Werte des Merkmals X): x_1, x_2, x_3, \dots

(Endlicher) Wertevorrat von Merkmal X : $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$

■ 1.3. Stichproben, Häufigkeitsverteilungen

Stichprobe der Länge $N \geq 1$: $S = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

(Urliste, Protokoll)

Kroneckerfunktion $\delta : M \times M \rightarrow \{0, 1\}$, definiert durch: $\delta(u, v) = 1$, falls $u = v$, $\delta(u, v) = 0$, falls $u \neq v$.

Anzahlfunktion (absolute Häufigkeit von \bar{x}_k in der Stichprobe S): $a_S(\bar{x}_k) := \sum_{j=1}^N \delta(\bar{x}_k, x_j)$

Relative Häufigkeit von Merkmalwert \bar{x}_k in der Stichprobe S : $h_S(\bar{x}_k) = h_k := \frac{a_S(\bar{x}_k)}{N}$.

Ist $M = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ der Wertevorrat von Merkmal X , so heißt (h_1, h_2, \dots, h_m) die Häufigkeitsverteilung (H-Verteilung) von X in der Stichprobe S . Es gilt $h_1 + h_2 + \dots + h_m = 1$.

Geläufige Diagrammformen zur Darstellung von H-Verteilungen: Tortendiagramm (auch Kreisdiagramm), Säulendiagramm (Stabdiagramm, Histogramm), Häufigkeitspolygone.

■ 1.4. Idee des Mittelwerts

- Charakteristischer Wert einer Stichprobe (Repräsentationsfunktion)
- (Indirekter) Vergleich von Verteilungen bzw. Stichproben
- Interner Vergleich von Merkmalwerten einer Stichprobe

2. Das arithmetische Mittel

■ 2.1. Definition (und erste Deutung)

Arithmetisches Mittel (AM) einer Stichprobe $S = (x_1, \dots, x_N)$ mit quantitativen Merkmalwerten:

$$A(S) = A(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} (x_1 + \dots + x_N)$$

Deutung: a) als Ausgleichwert, b) geometrisch: Mitte zwischen den Koordinaten x_1, x_2 ist $A(x_1, x_2)$.

■ 2.2. Anwendbarkeit

Quantitative Merkmale; symmetrische, eingipflige (unimodale) H-Verteilungen

Skalentypfehler: Anwendung auf ordinal ausgeprägte Beobachtungsgrößen (z.B. Schulnoten)

■ 2.3. Erweiterung (Zerlegung) der Stichprobe

Stichprobe $S = (x_1, \dots, x_N)$, $A_N := A(S)$, um Merkmalwerte x_{N+1}, \dots, x_{N+k} erweitern zu \tilde{S} , wobei $A_{N+k} = A(\tilde{S})$.

Es gilt:

$$A_{N+k} = \frac{N}{N+k} A_N + \frac{1}{N+k} \sum_{i=1}^k x_{N+i}$$

Zerlegungssatz:

Wird die Stichprobe S in die Stichproben S_1, S_2 der Länge l_1 bzw. l_2 zerlegt, so gilt:

$$A(S) = \frac{l_1}{l_1 + l_2} A(S_1) + \frac{l_2}{l_1 + l_2} A(S_2)$$

■ 2.4. Zusammenhang zwischen AM und relativer Häufigkeit

Die relative H. eines Merkmals \bar{x} in einer Stichprobe $S = (x_1, \dots, x_N)$ ist das AM:

$$h_S(\bar{x}) = \frac{1}{N} (\delta(\bar{x}, x_1) + \dots + \delta(\bar{x}, x_N))$$

Für die Stichproben unter 2.3 gilt die Ungleichung:

$$\left| h_{\bar{S}}(\bar{x}) - h_S(\bar{x}) \right| \leq \frac{k}{N+k}$$

Bem.: In Abschnitten konstanter Größe werden die Schwankungen der relativen H. beliebig klein (nicht gleichbedeutend mit Konvergenz!).

Darstellungssatz:

Sei $M = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ der Wertevorrat des quantitativen Merkmals X und S irgendeine Stichprobe von X . Dann gilt:

$$A(S) = \sum_{i=1}^m h_S(\bar{x}_i) \cdot \bar{x}_i = h_1 \bar{x}_1 + \dots + h_m \bar{x}_m$$

Bem.: Mechanische Deutung des AM als Schwerpunkt eines Hebelarms.

■ 2.5. Skalentransformationen

Lineare Skalentransformationen der Form $\phi(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, sind "AM-treu" im Sinne des folgenden Vertauschungssatzes:

Das AM skalentransformierter Merkmalwerte ist gleich dem skalentransformierten AM der ursprünglichen Merkmalwerte, d.h. es gilt: $A(\phi(x_1), \dots, \phi(x_N)) = \phi(A(x_1, \dots, x_N))$.

Für überall stetige Funktionen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich diese Behauptung umkehren, d.h. aus dem Erfülltsein von $A(\phi(x_1), \dots, \phi(x_N)) = \phi(A(x_1, \dots, x_N))$ folgt: Es gibt reelle Zahlen a, b mit $\phi(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Das geometrische Mittel

■ 3.1. Definition

$$G(S) = G(x_1, \dots, x_N) := \sqrt[N]{x_1 \cdot \dots \cdot x_N}$$

Deutung als "mittlere Proportionale": x_1, x, x_2 ist eine geometrische Folge genau dann, wenn $x = G(x_1, x_2)$.

■ 3.2. Exponentielles Wachstum

Bilden die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, \dots eine geometrische Folge, so gilt: $x_k = x_1 q^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$) für ein $q \in \mathbb{R}$.
Bezeichnungen: q Wachstumsfaktor, $r = q - 1$ Wachstumsrate

■ 3.3. Anwendung (des GM auf Wachstumsvorgänge)

Liegt ein Wachstumsvorgang in N Schritten mit den Wachstumsfaktoren q_1, \dots, q_N vor, so lässt sich $q := G(q_1, \dots, q_N)$ als (konstanter) mittlerer Wachstumsfaktor auffassen, der in N Schritten dasselbe Ergebnis liefert: $q^N = q_1 \cdot \dots \cdot q_N$.

■ 3.4. Die geometrisch-arithmetische Ungleichung

Satz: Für alle nicht-negativen reellen Zahlen x_1, \dots, x_N gilt $G(x_1, \dots, x_N) \leq A(x_1, \dots, x_N)$. Dabei gilt die Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_N$.

■ 3.5. Anwendung auf Optimierungsprobleme

Seien f_1, f_2, \dots, f_N in ihrem Definitionsbereich überall positive Funktionen, ferner $p, s \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

a) Ist $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_N = p$, so wird $f_1 + f_2 + \dots + f_N$ für genau diejenigen Argumente minimal, für die $f_1 = f_2 = \dots = f_N$. In diesem Fall beträgt das Minimum $N \sqrt[N]{p}$.

b) Ist $f_1 + f_2 + \dots + f_N = s$, so wird $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_N$ für genau diejenigen Argumente maximal, für die $f_1 = f_2 = \dots = f_N$. In diesem Fall beträgt das Maximum $\left(\frac{s}{N}\right)^N$.

4. Das harmonische Mittel

■ 4.1. Historische Herkunft

I) Pythagoreische Musiktheorie, II) Heron-Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

■ 4.2. Definition

$$H(S) = H(x_1, \dots, x_N) = \frac{N}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{x_j}}$$

■ 4.3. Mittelung zeitbezogener Größen

Beispiel: Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit

■ 4.4. Eine Ungleichung für das harmonische Mittel

Satz: Für alle positiven reellen Zahlen x_1, \dots, x_N gilt $H(x_1, \dots, x_N) \leq G(x_1, \dots, x_N)$. Gleichheit besteht genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_N$.

■ 4.5. Analyse des sog. Cost-Average-Effekts

Der Durchschnittseinstandspreis (z.B. einer Fonds-Anlage) übersteigt niemals den Durchschnittsausgabepreis. Dies gilt a priori aufgrund der Ungleichung $H \leq A$. Bei Preisschwankungen entsteht eine "Ersparnis" $A - H > 0$.

5. Ein elementares Anwendungsbeispiel

■ 5.1. Das Beispiel und seine Modellierung

Quelle: W. Kroll: Mittelwerte beim Autofahren. In: mathematiklehren H. 8 (Februar 1985), S. 49. Das Beispiel wird in allen Einzelheiten dargestellt und mittels Variablen modelliert.

■ 5.2. Das quadratische Mittel

Definition: $Q(S) = Q(x_1, \dots, x_N) := \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_N^2}{N}}$

Satz: Für alle positiven reellen Zahlen x_1, \dots, x_N gilt $A(x_1, \dots, x_N) \leq Q(x_1, \dots, x_N)$. Gleichheit besteht genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_N$.

6. Der Median (Zentralwert)

■ 6.1. Ein Beispiel. Allgemeine Definition

Beispiel: Schulnoten (als Werte eines ordinalen Merkmals) können nicht ohne weiteres durch das AM gemittelt werden.

Definition: Sei S eine angeordnete Stichprobe ordinalskalierten Merkmalwerte: $x_1 \leq \dots \leq x_N$. Ist N ungerade, so heißt $x_{\frac{N+1}{2}}$ Median (oder Zentralwert) von S . Ist N gerade und gilt $x_{\frac{N}{2}} = x_{\frac{N}{2}+1}$, so wird der Median durch $x_{\frac{N}{2}}$ definiert; im Fall $x_{\frac{N}{2}} < x_{\frac{N}{2}+1}$ kann jeder Wert z mit $x_{\frac{N}{2}} < z < x_{\frac{N}{2}+1}$ als Median gewählt werden. Bei metrischem Skalenniveau wird üblicherweise das arithmetische Mittel $z = A\left(x_{\frac{N}{2}}, x_{\frac{N}{2}+1}\right)$ gewählt.

Der Median $M(S)$ einer Stichprobe existiert somit nicht immer bzw. nicht immer eindeutig. Das folgende Summenkriterium ist notwendig und hinreichend für die Existenz des (eines) Zentralwerts.

Satz: Der Merkmalwertevorrat $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ sei oBdA angeordnet, $\bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_m$, und $1 \leq l \leq m$. Es gilt: \bar{x}_l ist Median der (angeordneten) Stichprobe S genau dann, wenn $h_S(\bar{x}_1) + \dots + h_S(\bar{x}_l) > \frac{1}{2}$ und $h_S(\bar{x}_l) + \dots + h_S(\bar{x}_m) > \frac{1}{2}$.

■ 6.2. Streuungsmaße

Sei μ eine beliebige reelle Zahl, $S = (x_1, \dots, x_N)$.

Mittlere lineare Abweichung von μ : $\lambda = L(S, \mu) := \frac{1}{N} (|x_1 - \mu| + \dots + |x_N - \mu|)$.

Mittlere quadratische Abweichung: $\frac{1}{N} ((x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_N - \mu)^2)$

Ist $\mu = A(S)$, so heißt $\sigma := Q(x_1 - \mu, \dots, x_N - \mu)$ die Varianz der Stichprobe S .

Bemerkung: $\lambda \leq \sigma$.

■ 6.3. Eine Minimalitätseigenschaft des Zentralwerts

Satz: Sei $\mu =$ Zentralwert von S . Dann nimmt $L(S, x)$ für $x = \mu$ ein absolutes Minimum an.

Vgl. hierzu die Unterrichtseinheit für die 7.-10. Klasse in H. Winter: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Vieweg: Wiesbaden 1991², S. 158-161.

■ 6.4. Ein Anwendungsbeispiel

Eine Aufgabe über die optimale Lokalisierung eines Auslieferungslagers (Öltank).

7. Gewichtete Mittel

In diesem Kapitel werden die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche behandelt, ferner die Jensensche Ungleichung (als Quelle der früher bewiesenen Mittelwertungleichungen), sowie zahlreiche Beispiele von Erwartungswerten (z.B. Nutzenerwartung, Entropie).

8. Ein allgemeines Ausgleichsprinzip

In diesem Kapitel werden folgende Themen behandelt: Prinzip der kleinsten Quadrate (lineare und nicht-lineare Regression), Mittelwerte als Abstandminima (als Gesichtspunkt, unter den sämtlich bis dahin behandelten Mittelwerte subsumiert werden).