Das allgemeine lineare Modell

Der Begriff des allgemeinen linearen Modells (ALM) umfasst die diskreten dynamischen Modelle, deren Zustände $x_0, x_1, x_2, \ldots$ durch *Iteration* (wiederholte Anwendung) *einer linearen Funktion* (sog. *Übergangsfunktion*) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugt werden:

> $F(x) = a\,x + b$
>
> a, b beliebige reelle Zahlen (Modellparameter)

Die Zustände x_n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ entstehen wie folgt:

x_0 Anfangszustand

$x_1 = F(x_0)$

$x_2 = F(x_1) = F(F(x_0)) = F^2(x_0)$

$x_3 = F(x_2) = F(F^2(x_0)) = F^3(x_0)$

usf.

<u>Allgemein:</u> $x_{n+1} = F(x_n) = a\,x_n + b$

Die allgemeine Lösung $x_n = F^n(x_0)$ lautet:

$$x_n = a^n\,x_0 + b\,\frac{a^n-1}{a-1}, \quad \text{falls } a \neq 1$$
$$x_n = x_0 + n\,b, \quad \text{falls } a = 1$$

F besitzt (höchstens) einen Fixpunkt $\overline{x}$ mit $F(\overline{x}) = \overline{x}$.

Der Fixpunkt ist Schnittpunkt der beiden Geraden $y = a\,x + b$ und $y = x$.

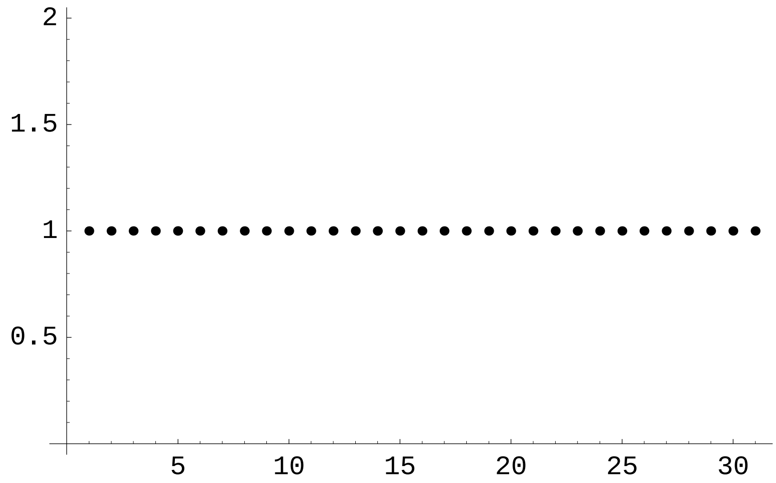
Durch Lösen der Gleichung $x = a\,x + b$ ergibt sich: $\overline{x} = -\frac{b}{a-1}$ $(a \neq 1)$.

Im Fall $a \neq 1$ lässt sich x_n damit in einer sog. *Fixpunktform* schreiben (Beweis: direktes Einsetzen).

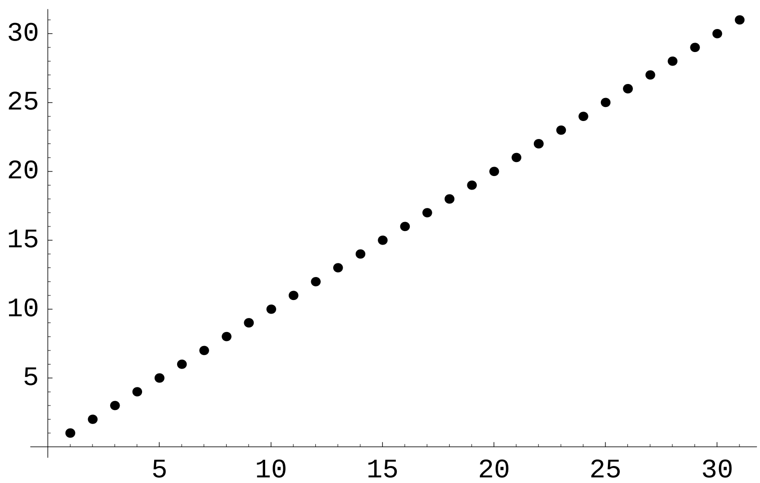
$$x_n = F^n(x_0) = a^n(x_0 - \overline{x}) + \overline{x}$$

■ Diskussion der möglichen Fälle

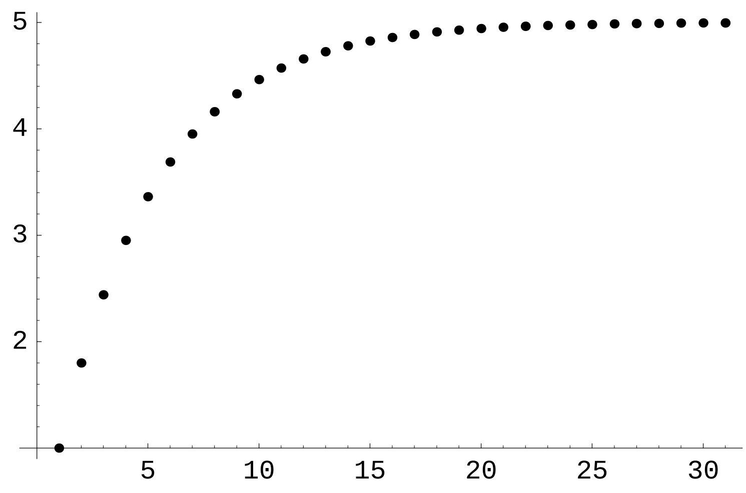
Fall 1. $a = 0$: konstante Folge $x_n = b$.



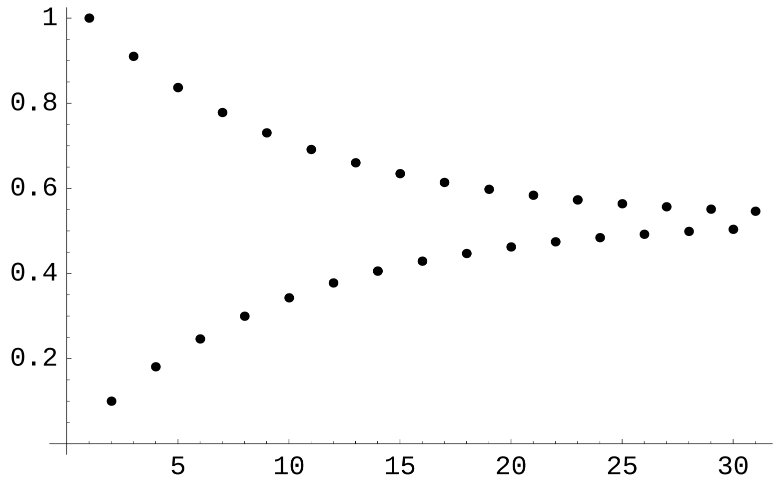
Fall 2. $a = 1$: lineares Wachstum; x_n ist eine arithmetische Folge (schließt auch den Fall $b < 0$ ein, bei dem die Folge abnimmt).



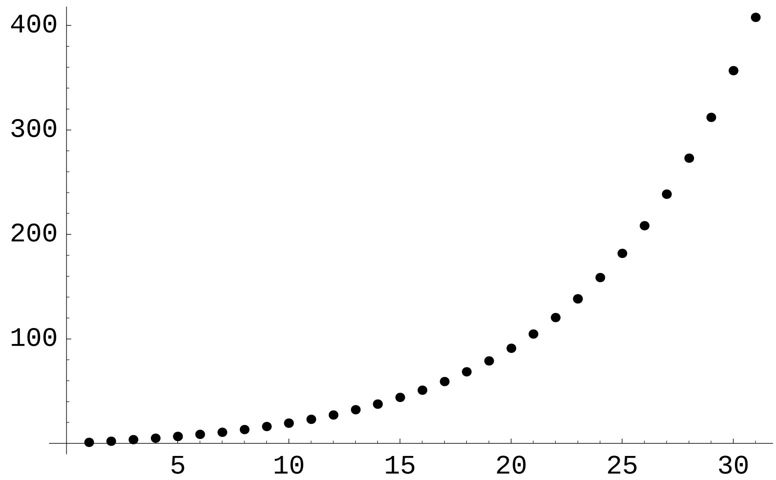
Fall 3. $0 < a < 1$: $\overline{x}$ ist stabil, d.h. $x_n \longrightarrow \overline{x}$ für $n \longrightarrow \infty$.



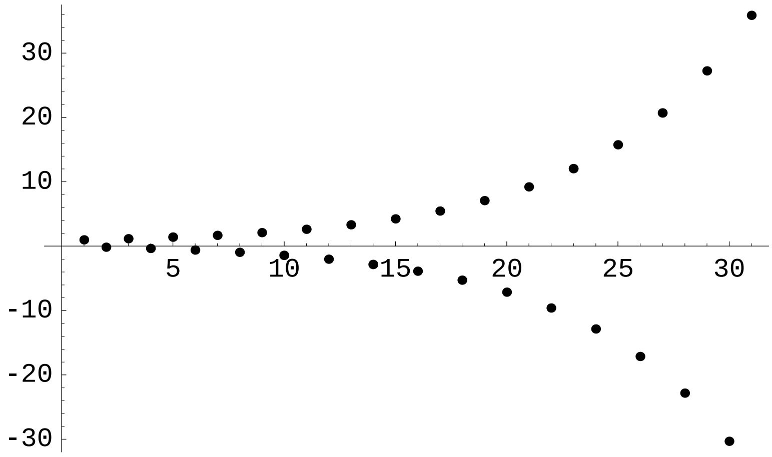
Fall 4. $-1 < a < 0$: gedämpfte Schwingung, sonst wie Fall 3.



Fall 5. $a > 1$: $\overline{x}$ ist instabil (abstoßender Fixpunkt); je nach Vorzeichen von $x_0 - \overline{x}$ ist x_n eine exponentiell wachsende oder fallende Folge.



Fall 6. $a < -1$: wie Fall 5, es resultiert jedoch eine Schwingung mit wachsender Amplitude.



Fall 7. $a = -1$: $x_n = x_0$ (n gerade), $x_n = b - x_0 = 2\,\overline{x} - x_0$ (n ungerade). Es liegt ein Zyklus der Länge 2 vor.