Ein Modell für Wachstum

Der Bestand x einer Bakterienpopulation wird alle 24 Stunden gemessen. Bei kleiner bis mittelgroßer Populationsdichte ergibt sich ein Wachstum von 5 Prozent zwischen zwei Messungen (1 Periode).

Entwicklung eines diskreten dynamischen Modells

Anfangsbestand: x_0

Bestand nach 1 Periode: $x_1 = x_0 + 0.05\,x_0 = 1.05\,x_0$

Die Differenz $x_1 - x_0$ heißt *Zuwachs*, das Verhältnis $q := \frac{x_1}{x_0}$ *Wachstumsfaktor*, $r := q - 1$ *Wachstumsrate*.

Im Gültigkeitsbereich erhält man die Bestandsfolge:

$$\begin{aligned}
&x_0\\
&x_1 = x_0\,q\\
&x_2 = x_1\,q\\
&\ldots\\
&x_n = x_{n-1}\,q\\
&\ldots
\end{aligned}$$

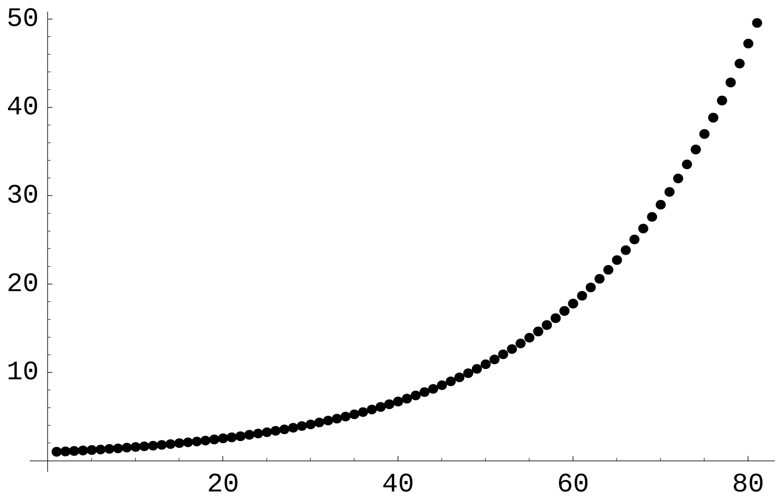
Es gilt: $x_n = x_0\,q^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (sog. *geometrische Folge*).

Der Quotient aufeinanderfolgender Glieder ist konstant ($= q$).

$q > 1$: Wachstum (im engeren Sinn)

$q < 1$: Zerfall ("negatives Wachstum" wegen $r < 0$)

$q = 1$: konstante (stationäre) Folge ("Nullwachstum" wegen $r = 0$)



Das Verhalten der Bestandsfolge (x_n) ist im wesentlichen durch q^n bestimmt. Es zeigt sog. *exponentielles Wachstum*.

Auf lange Sicht ($q > 1$, mit größer werdendem n) wächst q^n über alle Grenzen ($q^n \to \infty$ für $n \to \infty$). Für die Sachsituation (Bakterienkultur) ist dies natürlich unrealistisch.

■ Verdopplungszeit, Halbwertszeit

Wann wird $x_n \geq 2\, x_0$?

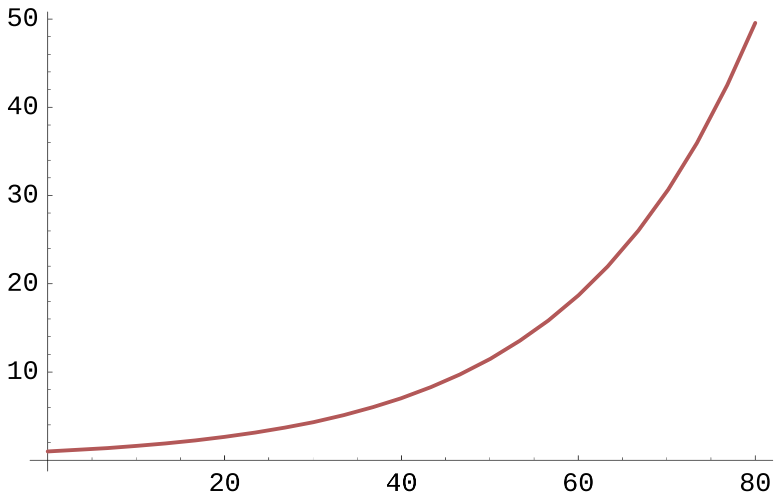
Sei d das kleinste n, das diese Ungleichung erfüllt; d heißt *Verdopplungszeit.* Entsprechend ist bei Zerfallsvorgängen eine *Halbwertszeit h* definiert als kleinstes n, für das gilt: $x_n \leq \frac{1}{2}\, x_0$.

Für kleine (positive) Wachstumsraten r (bis 10 %) gilt:

$$r \cdot d \approx 0.7$$

Die Exponentialfunktion als Modell stetigen Wachstums

Die geometrische Folge q^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) hat als kontinuierliche Entsprechung die allgemeine Exponentialfunktion $y = q^x$ (x reelle Zahl).



Wegen $q = e^{\log q}$ hat man: $q^x = e^{x \log q}$, wobei log der natürliche Logarithmus (zur Basis $e = 2.71828...$). Die allgemeine Exponentialfunktion kann somit in der Form $y = e^{a x}$ geschrieben werden; dabei ist $q = e^a$.

Darstellung der Funktionsschar $y = e^{a x}$ für $-1.5 \leq a \leq 1.5$: