

Finanzmathematische Grundaufgaben

Regelmäßig wiederkehrende Zahlungen

Im Wirtschaftsleben spielen regelmäßig wiederkehrende Zahlungen (sog. *Renten*) eine große Rolle, z.B.

- Kapitalisierung von Renten
 - Mietzahlungen für eine Immobilie
 - Leasing
 - Tilgung von Krediten
 - Annuitäten (Renten bei bekanntem Endwert)
- etc.

Das allgemeine lineare Modell lässt sich auf diese Situationen anwenden.

Wir spezifizieren (im Sinne des ALM):

x Geldbetrag, Kapital
 b regelmäßig gezahlter Betrag (Rente)
 a Zinsfaktor, genauer: $a = 1 + r$,
wobei $r = \frac{p}{100}$ und p der in % angegebene Zinssatz

Es ist $a > 1$ (wegen $p > 0$) und daher $\bar{x} = -\frac{b}{a-1} = -\frac{b}{r}$ ein abstoßender Fixpunkt. Die Gleichung

$$\bar{x} \cdot r = -b$$

drückt die *Reziprozität von Kapital und Zins* aus ("Kapital \times Zins = Rente").

Die bekannte Lösung des ALM liefert unmittelbar die *finanzmathematische Grundgleichung*:

$$x_n = x_0 \cdot (1 + r)^n + b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Sechs Grundaufgaben

In dieser Gleichung stecken 6 Sonderfälle, die in der Praxis häufig vorkommen. Jeder Fall entsteht dadurch, dass von den drei Größen x_0 , x_n , b jeweils eine Null gesetzt, eine als gegeben angenommen und die dritte gesucht wird:

Fall I. Endwert einer reinen Rente: $x_0 = 0$, b gegeben, x_n gesucht

$$x_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Fall II. Endkapital bei kumulativer Verzinsung: $b = 0$, x_0 gegeben, x_n gesucht

Dieser Sonderfall beinhaltet die einfache Zinseszinsrechnung nach dem Muster des exponentiellen Wachstums:

$$x_n = x_0 a^n = x_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, x_0 \text{ Anfangskapital}$$

Fall III. Barwert einer reinen Rente: $x_n = 0$, b gegeben, x_0 gesucht

$$x_0 = -b \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n r}$$

Fall IV. Annuität bei bekanntem Rentenendwert: $x_0 = 0$, x_n gegeben, x_0 gesucht

Fall V. Tilgungsrate eines Kredits ($b < 0$, $x_0 > 0$) oder Rente aus Kapital ($b > 0$, $x_0 < 0$): $x_n = 0$, x_0 gegeben, b gesucht

Fall VI. Barwert eines Kapitals: $b = 0$, x_n gegeben, x_0 gesucht