

## Modell für ein Konto

### Ausgangsproblem

Frau Meier hat auf ihrem Sparkonto ein Guthaben von 3000 €. An jedem Jahresende zahlt sie 400 € ein.  
Wie lautet der Kontostand nach Ablauf von 1, 2, 3, usw. Jahren?

#### ■ Ein Modell dieser Situation

sollte allgemein sein (d.h. anwendbar auf ähnliche Beispiele mit anderen Zahlenwerten)

sollte einfach sein (hier: keine anderen Zahlungen berücksichtigen und von einem festen Zinssatz ausgehen)

Gesucht: eine Formel für die Folge der Kontostände  $x_0, x_1, x_2, \dots$

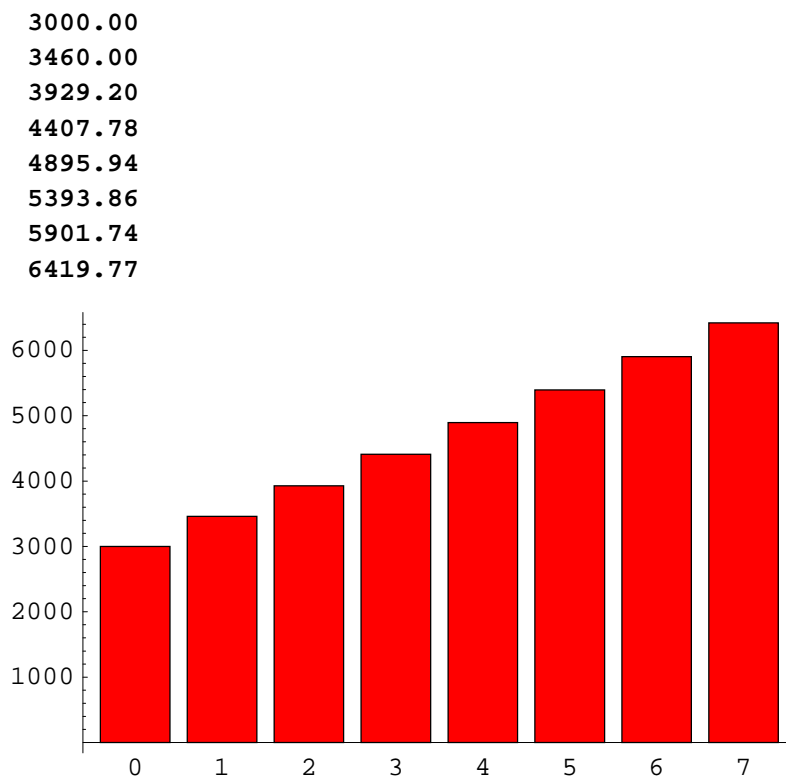
### Entwicklung eines (diskreten dynamischen) Modells

Der Einzahlungsbetrag am Ende der Zinsperiode werde mit  $b$  bezeichnet.

(Es ist laut Aufgabe  $b > 0$ . Das Modell sollte aber auch für  $b < 0$  und  $b = 0$  funktionieren und sinnvolle Ergebnisse liefern.)

Der Prozentsatz, zu dem das Kapital in einer Periode (Jahr) verzinst wird, werde mit  $p$  bezeichnet (d.h.  $r = \frac{p}{100}$  ist die zugehörige *Wachstumsrate*).

Wir wollen das Konto über 7 Jahre mit einem Zinssatz von 2 % fortschreiben:



Die ersten 3 Rechenschritte (bei Anfangskapital  $x_0$ ):

$$\begin{aligned}
 &x_0 \\
 &1.02 x_0 + 400 \\
 &1.02 (1.02 x_0 + 400) + 400 \\
 &1.02 (1.02 (1.02 x_0 + 400) + 400) + 400
 \end{aligned}$$

Allgemein:

Der Kontostand  $x_{n+1}$  geht aus dem des Vorjahres,  $x_n$ , wie folgt hervor:

$$x_{n+1} = a x_n + b$$

Dabei ist  $a = 1 + \frac{p}{100}$  der *Wachstumsfaktor* (Zinsfaktor) zum Zinssatz  $p$ .

Bei  $n = 0$  beginnend ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a x_0 + b \\
 x_2 &= a^2 x_0 + a b + b \\
 x_3 &= a^3 x_0 + a^2 b + a b + b \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

Offenbar hat  $x_n$  als ersten Summanden  $a^n x_0$ .

Die übrigen Summanden haben den Faktor  $b$  gemeinsam, sodass sich insgesamt die Formel vermuten lässt:

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

In der Klammer des zweiten Summanden steht eine *geometrische Reihe*, die für  $a \neq 1$  aufsummiert werden kann:

$$x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Für  $a = 1$  (d.h.  $p = 0$ ) ergibt sich:

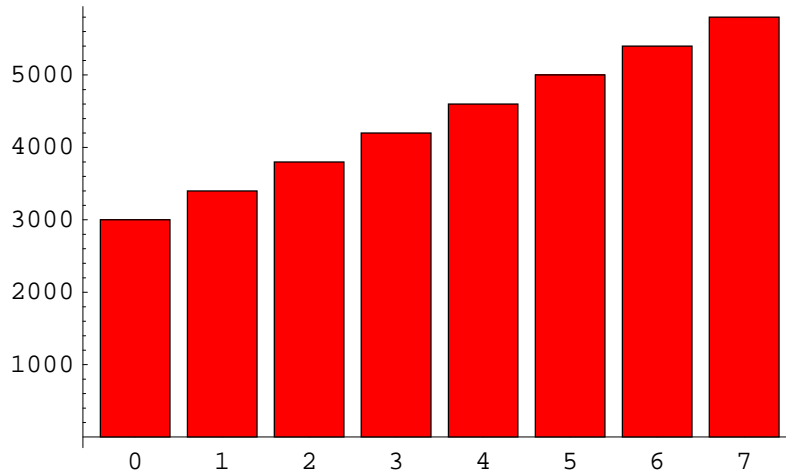
$$x_n = x_0 + b n$$

Zusammen liefert dies die *Modellgleichung(en)* für den Kontostand nach  $n$  Perioden.

### ■ Anmerkung

Für  $a = 1$  ist  $x_n$  eine *arithmetische Folge*.

Das Kapital vermehrt/vermindert sich (zinslos) durch wiederholte Addition/Subtraktion eines festen Betrags.



Für  $b = 0$  ist  $x_n$  eine *geometrische Folge*

(Modell des exponentiellen Wachstums/Zerfalls).

Vergleich der Wachstumsverläufe bei  $b = 0$  und  $b = 400$  über 20 Perioden:

