Normalform einer Entscheidungssituation

■ Ausgangsdaten

Entscheidungssituationen lassen sich übersichtlich darstellen, wenn man das Produkt der folgenden (endlichen) Mengen in Form einer Kreuz-Tabelle (Matrix) wiedergibt:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$	Menge der **Alternativen**
	(Handlungsalternativen, Aktionen, Strategien, ...)
$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$	Menge der **Bedingungen**
	(Umweltzustände, Einflussfaktoren, Alternativen der "Gegenseite")

Die Ausgangsdaten liegen (außer in sehr einfachen Fällen) nicht auf der Hand; sie ergeben sich normalerweise durch eine sorgfältige *Analyse der Sachsituation*.

■ Die Konsequenzenmatrix

Wird die Handlung a_i gewählt und tritt die Bedingung b_j ein, so hat dies eine Konsequenz (mit c_{ij} bezeichnet). Die Werte c_{ij} sind Elemente einer Menge C: Menge der **Konsequenzen** (Handlungsfolgen).

Die c_{ij} bilden ein rechteckiges Zahlenschema, die sog. **Konsequenzenmatrix**:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \ldots & \mathbf{b_n} \\
\mathbf{a_1} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\
\mathbf{a_2} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\
. & . & . & \ldots & . \\
\mathbf{a_m} & c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn}
\end{array}
$$

Die Ermittlung der Konsequenzenmatrix ist in vielen Fällen der Praxis eine komplexe und aufwändige Aufgabe. Welche Konsequenzen überhaupt in Betracht kommen, hängt in hohem Maße von den Zielen/Zwecken ab, die mit einer Entscheidung verfolgt werden. Man sollte daher *möglichst früh die Ziele in der Entscheidungssituation präzisieren und festlegen*.

■ Die Nutzenmatrix (Entscheidungsmatrix)

Im nächsten Schritt sind die denkbaren Konsequenzen (numerisch) zu bewerten. Dies geschieht durch eine **Nutzenfunktion**:

$u : C \longrightarrow \mathbb{R}$

Wir schreiben: $u_{ij} = u(c_{ij})$ für den Nutzen(wert) der Konsequenz c_{ij}.

Wird jede Konsequenz durch ihren Nutzen ersetzt, so erhalten wir die **Nutzenmatrix** U des Entscheidungsproblems (auch **Entscheidungsmatrix** genannt):

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	u_{11}	u_{12}	...	u_{1n}
a_2	u_{21}	u_{22}	...	u_{2n}
.	.	.	...	.
a_m	u_{m1}	u_{m2}	...	u_{mn}

■ Anmerkungen zur Entscheidungsmatrix

1. In manchen Fällen sind die Konsequenzen von vornherein in *quantitativer* Form (z.B. als Geldbeträge o. dgl.) gegeben. Man kann dann diese Werte zugleich als Nutzenwerte auffassen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, eine eigene (von der Identität verschiedene) Nutzenfunktion zu verwenden. Ein Beispiel dafür ist die logarithmische Funktion von Bernoulli, die den subjektiven Nutzen monetärer Größen wiedergeben soll.

2. Ist das Entscheidungsproblem in Wahrheit eine *Konfliktsituation* zwischen einem "Spieler" A und einem "Gegenspieler" B, so sind die Rollen der zugehörigen Mengen A, B grundsätzlich als gleichberechtigt anzusehen. (Deutet man, wie bei einseitigen Entscheidungssituationen üblich, B als eine Menge von Umweltbedingungen, so ist diese Symmetrie streng genommen nicht gegeben.) In diesem Fall fungieren die Elemente von A und B als *Strategien*, und beide Seiten versuchen, die jeweils für sie besten Strategien zu wählen. In der *Spieltheorie*, die sich mit der Modellierung solcher Konfliktsituationen beschäftigt, heißt die Entscheidungsmatrix gewöhnlich **Auszahlungsmatrix**.

■ Präferenzordnung, Lösungsmenge eines Entscheidungsproblems

Man gelangt zu einer Präferenzordnung in A durch eine sog. **Wertfunktion** $w : A \longrightarrow \mathbb{R}$, die jeder Alternative eine reelle Zahl zuordnet. Im allgemeinen gewinnt man eine Wertfunktion aus einer bereits vorliegenden Nutzenfunktion.

Präferenzverhalten und Wertfunktion hängen wie folgt zusammen:

1. a wird genau dann a' präferiert ($a > a'$), wenn $w(a) > w(a')$.

2. Bzgl. a, a' herrscht Indifferenz ($a \sim a'$) genau dann, wenn $w(a) = w(a')$.

Der Entscheider wird ein a wählen, das in der Präferenzordnung *maximal* ist, d.h. es gibt keine Alternative a' mit $a' > a$.

Die in diesem Sinne maximalen Handlungsalternativen bilden die **Lösungsmenge** $S(A)$ des Entscheidungsproblems. Man kann sie formal mit Hilfe der Wertfunktion ausdrücken:

$$S(A) := \{a \in A : w(a) \geq w(a') \text{ für alle } a' \in A\}$$

Es gilt: $S(A) \subseteq A$.

Die Lösung eines Entscheidungsproblems ist somit eine *Optimierungsaufgabe*. Sie besteht (abstrakt formuliert) darin, die Maxima der zugrundeliegenden Wertfunktion zu bestimmen.