

Entscheidungen bei Unsicherheit

Im Folgenden geht es um Individualentscheidungen bei Unsicherheit (im engeren Sinne).

Allgemeine Voraussetzungen:

$$A = \{a_1, \dots, a_m\} \quad (\text{Alternativen})$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\} \quad (\text{Bedingungen})$$

$$\text{Es liegt eine Nutzenmatrix vor: } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

Dominanz

■ Definition

Eine Alternative dominiert eine andere, wenn sie unter allen Bedingungen mindestens denselben Nutzen besitzt wie diese und unter wenigstens einer Bedingung einen höheren Nutzen.

Genauer:

$$a_k \text{ dominiert } a_i : \iff \begin{aligned} &1. \text{ f\u00fcr alle } j: u_{kj} \geq u_{ij} \\ &2. \text{ es gibt ein } j: u_{kj} > u_{ij} \end{aligned}$$

■ Prinzip der Dominanz

Nach diesem Prinzip d\u00fcrfen Handlungsalternativen, die von anderen dominiert werden, aus dem Entscheidungsverfahren genommen werden, d.h. man streicht die zugeh\u00f6rige Zeile in der Entscheidungsmatrix.

Wir betrachten folgende Matrizen:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (aus dem Beispiel "Der passende Wein")}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ (aus dem Beispiel "Das Gefangenendilemma")}$$

In U_1 gibt es keine Alternative (Zeile), die eine andere dominiert.

In U_2 dominiert die zu Zeile 1 gehörige Strategie a_1 (= *gestehen*) die Strategie a_2 (= *leugnen*). Das gilt umgekehrt auch für den Gegenspieler, der dieselbe Matrix besitzt. Somit können sich beide Gefangene rational nur dafür entscheiden, ein Geständnis abzulegen. (N.B.: Die Gefangenen sind nicht in der Lage, zu kooperieren und so gemeinsames Abstreiten der Tat zu verabreden, was sicher die beste Strategie wäre.)

■ Definition

Eine Alternative heißt dominant, wenn sie alle übrigen Alternativen dominiert.

Existiert in einer Entscheidungssituation eine dominante Alternative, so können (nach dem Prinzip der Dominanz) alle übrigen Alternativen gestrichen werden. D.h.: eine dominante Alternative ist maximal in der Präferenzordnung und daher (nach dem Optimalitätsprinzip) wählbar!

Einige klassische Entscheidungsregeln

Die Anwendung aller nachstehenden Regeln wird am Beispiel "Der passende Wein" demonstriert; somit ist

$$m = n = 3, \text{ und die Nutzenmatrix (s.o.) lautet: } U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Entscheidungsregel ist durch Angabe einer Wertfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ festgelegt. Es genügt daher im Folgenden, die Wertfunktion der jeweiligen Entscheidungsregel zu erklären.

■ Maximin-Regel

Die Wertfunktion berechnet zu einer Alternative den garantierten Nutzen (Minimalnutzen):

$$w_{\text{maximin}}(a_i) := \min \{u_{ij} : 1 \leq j \leq n\}$$

Dieser vorsichtigen (pessimistischen) Regel zufolge entscheidet man sich für eine Alternative, die einen größtmöglichen garantierten Nutzen liefert. (Nicht zu verwechseln mit einer Alternative, die einen größtmöglichen Nutzen garantiert!)

Beispiel: Die Minima der Zeilen lauten: $w_{\text{maximin}}(a_i) = -1$ ($i = 1, 2, 3$). Danach besteht Indifferenz bzgl. der Weinsorte, und jeder Wein ist wählbar.

■ Maximax-Regel

Die Wertfunktion berechnet zu einer Alternative den Maximalnutzen:

$$w_{\text{maximax}}(a_i) := \max \{u_{ij} : 1 \leq j \leq n\}$$

Dieser (extrem optimistischen) Regel zufolge entscheidet man sich für eine Alternative, die einen größtmöglichen Maximalnutzen liefert.

Beispiel: Die Maxima der Zeilen lauten $w_{\text{maximax}}(a_1) = 1$, $w_{\text{maximax}}(a_2) = 1$, $w_{\text{maximax}}(a_3) = 0.5$. Danach besteht bzgl. Weisswein und Rotwein Indifferenz, ferner sind beide einem Rosé vorzuziehen.

■ Niehans-Savage-Regel

Um die betreffende Wertfunktion definieren zu können, ermittle man zunächst zu jeder Bedingung b_j den maximalen Nutzen: $u_j^* := \max \{u_{ij} : 1 \leq i \leq m\}$.

Im Vergleich mit den u_j^* ergeben sich zu jeder Alternative a_i Bedauernswerte: $d_{ij} := u_{ij} - u_j^*$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$). Die d_{ij} sind sämtlich ≤ 0 . Je größer ein Bedauernswert dem Absolutbetrage nach ausfällt, desto mehr kann der maximale Nutzen durch den tatsächlich realisierten Nutzen u_{ij} als verfehlt angesehen werden.

Die Wertfunktion zur Niehans-Savage-Regel berechnet den minimalen (negativen) Bedauernswert:

$$w_{\text{Niehans}}(a_i) := \min \{d_{ij} : 1 \leq j \leq n\}$$

Man entscheidet sich hierbei für eine Alternative, bei der der minimale Bedauernswert am größten ist (d.h. der betragsmäßig größte Bedauernswert ist dann am kleinsten). Das Vorgehen verrät eine (in die Vergangenheit gerichtete) pessimistische Einstellung.

Beispiel: Es ist $u_1^* = u_2^* = u_3^* = 1$. Mithin ergibt sich die **Bedauernsmatrix** $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -0.5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Die

Wertfunktion (nach Niehans) berechnet die Zeilenminima von D : $w_{\text{Niehans}}(a_i) = -2$ ($i = 1, 2, 3$). Infolgedessen besteht Indifferenz bzgl. der Wahl der Weinsorte.

■ Laplace-Regel

Die Wertfunktion berechnet zu einer Alternative den mittleren Nutzen, d.h. das arithmetische Mittel der Nutzenwerte unter den vorhandenen Bedingungen:

$$w_{\text{Laplace}}(a_i) := \frac{1}{n} (u_{i1} + u_{i2} + \dots + u_{in})$$

Dieser Regel zufolge entscheidet man sich für eine Alternative mit größtmöglichem mittleren Nutzen. Bei der Mittelwertbildung geht die Regel stillschweigend davon aus, dass alle Bedingungen gleich wahrscheinlich sind (jeder Nutzenwert geht mit demselben Gewicht $\frac{1}{n}$ in die Summe ein!).

Beispiel: Die mittleren Nutzenwerte lauten

$$w_{\text{Laplace}}(a_1) = \frac{1}{3} (1 + (-1) + 1) = \frac{1}{3}$$

$$w_{\text{Laplace}}(a_2) = \frac{0}{3} = 0$$

$$w_{\text{Laplace}}(a_3) = \frac{-0.5}{3} = -\frac{1}{6}$$

Damit ergibt sich die Präferenzordnung $a_1 > a_2 > a_3$, d.h. man entscheidet sich für Weisswein.

Ergänzungen

■ Rationalität der Regeln

Die hier vorgestellten Entscheidungsregeln liefern zwar eine präskriptive Handlungssystematik, spiegeln nichtsdestoweniger aber ein teilweise beträchtliches Ad-hoc-Vorgehen auf der Entscheiderseite.

Am ehesten kommt in der Laplace-Regel ein echtes gegenseitiges Abwägen der Bedingungen zum Vorschein (wobei allerdings die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit systematisch anfechtbar und aus der Sicht der Praxis unrealistisch ist). Ausgehend von allgemeinen Prinzipien, die in einer axiomatischen Nutzentheorie verankert werden, lässt sich einzig die (hier noch nicht erklärte) Bernoulli-Regel als rational begründen. Sie stellt eine Verallgemeinerung der Laplace-Regel dar und gewichtet die Nutzenwerte mit (nicht von vornherein konstant gleichen) Wahrscheinlichkeiten. Die Bernoulli-Regel gehört in den Zusammenhang der Entscheidungen unter Risiko.

Für eine kritische Diskussion der hier nur angedeuteten Rationalitätsprobleme vgl. [Werner Krabs: *Mathematische Modellbildung*. Teubner-Verlag: Stuttgart 1997, S. 35f.] sowie [Helmut Laux: *Entscheidungstheorie*. 4. Aufl., Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1998, S. 104f.]

■ Automatische Berechnung von Lösungsmengen

Das *Mathematica*-Notebook Entscheidungsregeln.nb enthält eine Reihe von Funktionen, die mit den oben definierten Wertfunktionen zu vorgegebener Nutzenmatrix U direkt die Lösungsmenge des Entscheidungsproblems berechnen.

Einen Überblick über die implementierten Befehle erhalten Sie am besten, wenn Sie die Notebook-Datei laden und anschauen.

Anmerkung: Die Untersuchung auf Dominanz ist in der vorliegenden Fassung noch nicht enthalten.

Vorbereitung zum Gebrauch des Pakets:

Legen Sie im *Mathematica*-Ordner "AddOns\ExtraPackages" den Unterordner "Modellbildung" an und kopieren Sie das Package Entscheidungsregeln.m in den Pfad "AddOns\ExtraPackages\Modellbildung".

Laden Sie dann das Paket durch folgende Input-Zeile:

```
<< Modellbildung`Entscheidungsregeln`
```

Als Testdatum möge wiederum die Entscheidungsmatrix aus dem Beispiel "Der passende Wein" dienen, hier als Liste ihrer Zeilen(vektoren):

```
weinmatrix = {{1, -1, 1}, {0, 1, -1}, {0.5, 0, -1}};
```

Wir entscheiden zum Vergleich mit allen vier Regeln:

```
Maximin[weinmatrix]  
Maximax[weinmatrix]  
NiehansSavage[weinmatrix]  
Laplace[weinmatrix]
```

```
{1, 2, 3}
```

```
{1, 2}
```

```
{1, 2, 3}
```

```
{1}
```