Logarithmischer Nutzen (nach Bernoulli)

■ Problemstellung

Die Konsequenzen c eines Entscheidungsproblems seien von vornherein als numerische Größen gegeben, z.B. als Geldwerte.

Es soll eine Nutzenfunktion $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert werden, die folgende Grundidee zum Ausdruck bringt (nach *Daniel Bernoulli*, 1738):

> Ein bestimmter Geldbetrag (Vermögenszuwachs) hat für eine Person umso größeren Nutzen, je kleiner ihr augenblickliches Vermögen ist:
>
> c : Vermögen
>
> Δc : Vermögenszuwachs
>
> Nutzenzuwachs $\propto \frac{\Delta c}{c}$

■ Herleitung einer entsprechenden Nutzenfunktion

Die obige umgekehrte Proportionalität schreiben wir zunächst als Gleichung mit einer Proportionalitätskonstanten $k > 0$:

$$u(c + \Delta c) - u(c) = k \cdot \frac{\Delta c}{c}$$

Hieraus ergibt sich der Differenzenquotient:

$$\frac{u(c+\Delta c) - u(c)}{\Delta c} = k \cdot \frac{1}{c}$$

Wir lassen $\Delta c \to 0$ wandern und erhalten im Grenzübergang die erste Ableitung:

$$u'(c) = k \cdot \frac{1}{c}$$

Die zugehörige Stammfunktion ist bis auf eine additive Konstante (Integrationskonstante) k_0 bestimmt und lautet:

$$u(c) = k \cdot \log c + k_0$$

■ Diskussion

Offenbar ist die resultierende Funktion u festgelegt bis auf eine lineare Transformation (Skalierung: Streckung mit Faktor k und Verschiebung um k_0).

Es ist $u(1) = k_0$, d.h. k_0 ist durch den Nutzenwert von 1 Geldeinheit bestimmt. Zum Beispiel ist die Vereinbarung $k_0 = 0$ denkbar.

Stellt man den Nutzen eines weiteren Wertes c fest, z.B. $u(10) = 2$, so ist auch k bestimmt, hier durch die Gleichung $2 = k \cdot \log 10$:

```
k = 2 / Log[10] // N
```

```
0.868589
```

Wir zeichnen ein Schaubild:

```
Plot[k * Log[c], {c, 0, 20}, PlotRange → {-1, 2.5}];
```