
Normierung

Skalen

Für ein Entscheidungsproblem liefert eine Nutzenfunktion häufig eine endliche (in jedem Fall aber beschränkte) Menge $u[C]$ von Werten (ablesbar in der Nutzenmatrix).

■ Beispiel: "Der passende Wein"

Die Nutzenmatrix lautet:
$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Wertebereich der Nutzenfunktion u besteht somit aus 4 Werten: $u[C] = \{-1, 0, 0.5, 1\}$

Wenn wir die auftretenden Werte der Größe nach ordnen, erhalten wir eine *Skala* der Nutzenwerte. Im Beispiel reicht sie von -1 bis $+1$.

■ Beispiel: "Logarithmischer Nutzen"

Die Konsequenzenmenge $C = \{1, 2, \dots, 100\}$ soll mit der logarithmischen Nutzenfunktion $u(c) = 2 \cdot \log c + 1$ bewertet werden.

Die resultierende Nutzenskala reicht in diesem Fall von $u_{\min} = u(1) = 1$ bis $u_{\max} = u(100) = 2 \cdot \log 100 + 1 \approx 10.2$

■ Vergleichbarkeit

Maßangaben, die aus verschiedenen Skalen stammen, sind nicht ohne weiteres vergleichbar.

Beispiele: Konfektionsgrößen, Zensuren, Temperaturen, Längenmaße, etc. (jeweils in unterschiedlichen nationalen Systemen)

Eine Temperatur von 20° ist angenehm, wenn es sich um Celsius-Grade handelt. Bei 20° im Fahrenheit-System (die ca. -6.7°C entsprechen) müssen wir uns hingegen warm anziehen.

Entsprechendes gilt für Skalen, die durch Nutzen- bzw. Wertfunktionen geliefert werden.

Um Skalen miteinander vergleichbar zu machen, muss man sie *transformieren* (ineinander umwandeln); am besten bildet man sie auf eine genormte Einheitsskala ab.

Skalentransformationen

Welche Transformationen (Abbildungen) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kommen für die Umwandlung von Skalen in Frage?

Beispiel: Die Umwandlung von Celsius-Graden x in Fahrenheit-Graden y geschieht nach der Vorschrift:

$$y = T(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

Die Transformation T ist hier eine *lineare Funktion*: Sie verschiebt den Nullpunkt auf 32° (F) und streckt das Wertintervall durch Multiplikation mit dem Faktor 1,8.

■ Anmerkung

Eine genauere (theoretische) Erörterung von Skalen zeigt: Durch Anforderungen an die Maßbestimmung sind die resultierenden Funktionen (insbes. auch Nutzen- und Wertfunktionen) *eindeutig festgelegt bis auf lineare Transformationen*. [Vgl. hierfür etwa J. von Neumann & O. Morgenstern: *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, 2. Auflage, Würzburg 1967, S. 15 f.]

■ Die allgemeine Skalentransformation

Eine Skalentransformation ist eine lineare Funktion $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Bauart:

$$T(x) = \alpha x + \beta \text{ mit } \alpha > 0$$

Der Streckfaktor α muss positiv sein, damit die Ordnung der Skalenwerte erhalten bleibt. (N.B.: Ein Anstieg der Temperatur auf der Celsius-Skala ist auch ein Temperaturanstieg auf der Fahrenheit-Skala.)

Folgende Eigenschaft gibt dies in allgemeiner Form wieder:

T ist streng monoton (wachsend), d.h.

für alle Werte x_1, x_2 gilt: wenn $x_1 < x_2$, dann $T(x_1) < T(x_2)$

Beweis: Sei $x_1 < x_2$. Dann ist $\alpha x_1 < \alpha x_2$ wegen $\alpha > 0$. Nach Addition von β auf beiden Seiten ergibt sich die Behauptung. ■

Wichtige Folgerung:

Die Präferenzordnung eines Entscheidungsproblems ändert sich nicht, wenn die Skala der Wertfunktion (d.h. die Menge $w[A]$) einer Skalentransformation unterworfen wird.

■ Normierung

Eine Normierung ist eine Skalentransformation T , die eine gegebene (häufig endliche) beschränkte Wertemenge ("Skala", etwa in Form eines Intervalls $X = [x_{\min}, x_{\max}]$) in das Einheitsintervall $[0,1]$ abbildet. Dabei wird dem kleinsten Skalenwert 0, dem größten Skalenwert 1 zugeordnet, d.h. es gilt: $T(x_{\min}) = 0$, $T(x_{\max}) = 1$.

Beispiel ("Der passende Wein"):

Die Wertemenge $u[C] = \{-1, 0, 0.5, 1\}$ ist so abzubilden, dass gilt:

$$0 = T(-1) = \alpha(-1) + \beta \quad (\text{Minimum})$$

$$1 = T(1) = \alpha \cdot 1 + \beta \quad (\text{Maximum})$$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, d.h. die gesuchte Transformation T lautet:

$$T(x) = \frac{1}{2} (x + 1)$$

Offenbar ist eine Normierung (zu gegebener Wertemenge) *eindeutig bestimmt*.

Wenden wir diese Abbildung elementweise auf die Nutzenmatrix an, so erhalten wir die *normierte Nutzenmatrix* (bzw. *normierte Entscheidungsmatrix*) $U^\# = T(U)$:

$$U^\# = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein verläuft das Normierungsverfahren für eine gegebene Skala (Wertemenge) wie folgt:

1. Bestimme den kleinsten und den größten Wert der Skala: x_{\min} bzw. x_{\max} .
2. Berechne α , β aus dem linearen Gleichungssystem:

$$T(x_{\min}) = \alpha x_{\min} + \beta = 0,$$

$$T(x_{\max}) = \alpha x_{\max} + \beta = 1.$$
3. Wende die Transformation $T(x) = \alpha x + \beta$ auf die gegebene Skala (Matrix) an.

■ Normierte Nutzenfunktionen

Eine Nutzenfunktion u heiße normiert auf $C = [c_{\min}, c_{\max}]$, wenn

1. ihre Werte im Einheitsintervall liegen, d.h. $u(c) \in [0, 1]$ für alle $c \in C$
2. $u(c_{\min}) = 0$ und $u(c_{\max}) = 1$.

Ist eine *beliebige* Nutzenfunktion u gegeben, so kann man mit Hilfe einer passenden Skalentransformation ohne weiteres zur *normierten* Nutzenfunktion $u^\#$ übergehen:

■ Satz und Definition

Sei $C = [c_{\min}, c_{\max}]$ und $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion mit $u(c_{\min})$ und $u(c_{\max})$ als absolutem Minimum bzw. Maximum; ferner sei T die (eindeutig bestimmte) Normierung der Wertemenge $u[C]$.

Dann ist die durch $u^\#(c) := T(u(c))$ ($c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$) definierte Funktion normiert auf C (die zu u gehörige normierte Nutzenfunktion).

Beweis: Offenkundig ist $u^\#(c) \in [0, 1]$ für alle $c \in C$. Nach Voraussetzung gilt $u^\#(c_{\min}) = T(u(c_{\min})) = 0$ und $u^\#(c_{\max}) = T(u(c_{\max})) = 1$. ■

Häufig sind die in der Praxis betrachteten Nutzenfunktionen (streng) monoton wachsend auf ihrem Definitionsintervall $C = [c_{\min}, c_{\max}]$. In diesem Fall ist die geforderte Bedingung, wonach $u(c_{\min})$ absolutes Minimum (und entsprechend $u(c_{\max})$ absolutes Maximum) von $u[C]$ ist, per se erfüllt.

Beispiel:

Die Nutzenfunktion aus dem Beispiel "Logarithmischer Nutzen" (s.o.) lautet:

$$u(c) = 2 \cdot \log c + 1, \text{ wobei } c \in C = \{1, \dots, 100\}.$$

Aus den (oben) bereits ermittelten Werten $u_{\min} = u(1)$ und $u_{\max} = u(100)$ ergibt sich die Normierung:

$$T(x) = \frac{1}{2 \log 100} x - \frac{1}{2 \log 100}$$

Das zu u gehörige $u^\#$ lautet damit: $u^\#(c) = T(u(c)) = \frac{\log c}{\log 100}$.

In der Tat bestätigt man: $u^\#(1) = 0$ und $u^\#(100) = 1$.

■ Eine allgemeine Formel

Es wurde in einer vorangehenden Anmerkung darauf hingewiesen, dass Nutzenfunktionen bis auf eine (lineare) Skalentransformation eindeutig festgelegt sind. Anstelle einer einzelnen Funktion f haben wir somit folgende 2-parametrische Schar zu betrachten:

$$u(c) = k_0 + k_1 \cdot f(c)$$

mit variablen reellen Parametern k_0, k_1 .

In diesem Zusammenhang soll f als Typfunktion von u bezeichnet werden. Z.B. ist eine logarithmische Nutzenfunktion eine Nutzenfunktion, die den Logarithmus als Typfunktion hat (s.o.): $k_0 + k_1 \log c$, usw.

Wie im obigen Satz nehmen wir an, dass die Funktion u bei $c = c_{\min}$ ihr absolutes Minimum annimmt, entsprechend bei $c = c_{\max}$ ihr absolutes Maximum (wobei $f(c_{\max}) > f(c_{\min})$). Sei wieder T die Normierung von $u[C] = [u(c_{\min}), u(c_{\max})]$. Dann gilt für die zu u gehörige normierte Nutzenfunktion $u^\#$:

$$u^\#(c) = \frac{f(c) - f(c_{\min})}{f(c_{\max}) - f(c_{\min})}$$

Beweis: Mit $T(x) = \alpha x + \beta$ erhält man aus den Gleichungen $T(u(c_{\min})) = 0$ und $T(u(c_{\max})) = 1$ nach kurzer Rechnung für die Koeffizienten α und β :

$$\alpha = \frac{1}{k_1(f(c_{\max})-f(c_{\min}))}, \beta = -\frac{k_0+k_1 f(c_{\min})}{k_1(f(c_{\max})-f(c_{\min}))}$$

Auswertung des Ausdrucks $u^\#(c) = T(u(c)) = \alpha u(c) + \beta$ liefert dann die Behauptung. ■

Offenbar läuft die Normierung der Nutzenfunktion darauf hinaus, ihre Parameter k_0, k_1 so festzulegen, dass $u(c_{\min}) = k_0 + k_1 f(c_{\min}) = 0$ und $u(c_{\max}) = k_0 + k_1 f(c_{\max}) = 1$. Löst man diese Gleichungen nach k_0, k_1 auf, so ergeben sich sofort die Werte $k_0 = -\frac{f(c_{\min})}{f(c_{\max})-f(c_{\min})}$ und $k_1 = \frac{1}{f(c_{\max})-f(c_{\min})}$ (und damit noch einmal die obige Behauptung).

Die obige Formel ist ein bequemes Mittel, die Normierung einer Nutzenfunktion direkt über deren Typfunktion zu erreichen.

■ Automatische Berechnung

Die folgende *Mathematica*-Funktion "Normiere" führt die Normierung bzgl. gegebener Werte x_{\min}, x_{\max} für einen einzelnen Wert x durch. Dabei wird eine vorab ermittelte allgemeine Lösung des linearen Glg.-Systems (unter obigem Schritt Nr. 2) verwendet. Der (triviale) Fall, dass Minimum und Maximum übereinstimmen, ist darin berücksichtigt.

```
Normiere[x_, xmin_, xmax_] := Module[{alpha, beta},
  {alpha, beta} = Which[
    xmin == xmax, {If[xmin != 0, 1/xmin, 0], 0},
    xmin < xmax, {1/(xmax - xmin), -alpha * xmin}];
  alpha * x + beta
]
```

Wir berechnen einen Einzelwert:

```
Normiere[0.5, -1, 1]
```

```
0.75
```

Um eine gegebene Wertemenge (Skala, Matrix) s auf einen Schlag normieren zu können, berechnen wir zunächst deren x_{\min} und x_{\max} und reichen diese anschließend an die Funktion "Normiere" weiter:

```
NormiereSkala[s_] := Module[{smin = Min[s], smax = Max[s]},
  Normiere[s, smin, smax]
]
```

Die Matrix im Beispiel "Der passende Wein":

```
weinmatrix = {{1, -1, 1}, {0, 1, 1}, {0.5, 0, -1}};
```

Die Funktion "NormiereSkala" macht daraus die normierte Nutzenmatrix:

```
NormiereSkala[weinmatrix]
```

```
{ {1, 0, 1}, {1/2, 1, 1}, {0.75, 1/2, 0} }
```

In Matrixform sieht das Ergebnis übersichtlicher aus:

```
% // MatrixForm
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0.75 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

```