© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-19

Der Barwert einer Zahlungsreihe

Die einführenden Überlegungen (zum "Zeitwert des Geldes" oder das Beispiel "Taxi Fuhrmann") legen den im Folgenden entwickelten Begriff des Barwertes einer Zahlungsreihe nahe.

Zahlungsreihen

Eine **Zahlungsreihe** $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ ist eine endliche Folge von zeitlich verteilten (nachschüssigen) Einzelzahlungen. Es bezeichnet c_j den Geldwert der Zahlung am Ende der j-ten Periode. Die Zahlung c_0 erfolgt zu Beginn der ersten Periode.

Es soll durchweg vorausgesetzt werden, dass die Zahlungen mit Sicherheit erfolgen.

Sprechweisen:

$c_j < 0$: Einzahlung

$c_j > 0$: Auszahlung

$c_j = 0$: Nullzahlung (keine Zahlung)

Für jede der $N-1$ Perioden sei eine monetäre Zeitpräferenzrate (ein Zinssatz) r_j und damit ein Zinsfaktor $q_j = 1 + r_j$ als gültig zu Grunde gelegt ($1 \leq j \leq N-1$).

Barwerte

Die Folge der Zinsfaktoren $(q_1, \ldots, q_{N-1})$ wird dazu benutzt, jede Einzelzahlung c_j in einen auf die Gegenwart (Zeitpunkt 0) bezogenen Nutzenwert $u_j(c_j)$ umzurechnen; dieser **Barwert von** c_j entsteht durch schrittweise Diskontierung (Abzinsung) mit den Zinsfaktoren der Perioden j bis 1:

$$u_j(c_j) := \frac{c_j}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_j}, \text{ wobei } u_0(c_0) := c_0$$

Die $u_j(c_j)$ sind als Teilnutzenwerte der Zahlungen in den Perioden anzusehen. Als Barwerte sind sie vergleichbar; es bedarf somit keiner Normierung. Naturgemäß sind die Zahlungen präferenzunabhängig. Daher kann einer

Zahlungsreihe ein Gesamtnutzen zugeordnet werden, der im "additiven Modell" nichts anderes ist als die Summe der Einzelbarwerte (alle mit gleichem Gewicht berücksichtigt):

$$u(c) = u_0(c_0) + u_1(c_1) + \ldots + u_{N-1}(c_{N-1})$$

Wir definieren diesen Gesamtnutzen der Zahlungsreihe $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ als ihren **Barwert** ("present value"):

$$\mathrm{PV}(c \mid q_1, \ldots, q_{N-1}) := c_0 + \frac{c_1}{q_1} + \frac{c_2}{q_1\, q_2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{q_1\, q_2 \cdots q_{N-1}}$$

Der hier gegebene Ausdruck repräsentiert das Diskontierungsmodell für die Bewertung von Zahlungsreihen in allgemeiner Form [vgl. dazu auch das *Mathematica*-Paket Diskontierung.m].

■ Wichtiger Spezialfall: konstanter Zinsfaktor

Weisen alle Perioden des Betrachtungszeitraums den gleichen Zinsfaktor q auf, so nimmt die Funktion PV folgende Gestalt an:

$$\mathrm{PV}(c, q) := c_0 + \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{q^{N-1}}$$

Wir schreiben auch (unter Hervorhebung der Zinsrate $r = q - 1$):

$$\mathrm{PV}(c; r) := c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{(1+r)^{N-1}}$$

Entscheidungen mit PV als Wertfunktion

Zwei Handlungsalternativen a, a' mögen Zahlungsreihen c bzw. c' als Konsequenzen nach sich ziehen. Betrachtet man PV als Nutzenfunktion (im Zusammenhang einer Entscheidung bei Sicherheit zugleich: Wertfunktion), so liefert das Optimalitätprinzip sofort die Entscheidungsregel:

$$a > a', \text{ wenn } \mathrm{PV}(c; r) > \mathrm{PV}(c', r)$$

Bei Geldgeschäften geht es oft darum, sich für a (und eine damit verbundene Zahlungsreihe c) zu entscheiden oder in das Geschäft nicht einzuwilligen (Alternative a'). Letzteres zieht eine Folge von Nullzahlungen nach sich, für die in jedem Fall $\mathrm{PV} = 0$ ist.

Aus dieser Sicht erscheint (bei gegebener Zinsrate r) ein Geldgeschäft c als **günstig**, wenn $\mathrm{PV}(c; r) > 0$, andernfalls als **ungünstig** ($\mathrm{PV} < 0$) oder **neutral** ($\mathrm{PV} = 0$).

Bzgl. neutraler Geldgeschäfte besteht somit Indifferenz. Das gilt selbstredend für beide Geschäftspartner, die aus diesem Grund das Geschäft als fair empfinden.