Festverzinsliche Wertpapiere

Festverzinsliche Anleihen sind mit einem Nominal-Zinssatz (sog. *Kupon*) ausgestattet, mit dem der Nominalwert (Nennwert: 100) während der Laufzeit des Papiers verzinst wird. Die Verzinsung kann kumulierend erfolgen ("Zinssammler") oder einfach.

An der Wertpapierbörse sind diese Anleihen handelbar und können gegen Zahlung eines Preises (*Kurs* des Wertpapiers) den Besitzer wechseln.

Die Berechnung von Kurs und Rendite festverzinslicher Wertpapiere ergibt sich als eine naheliegende Anwendung des Begriffs der internen Zinsrate bzw. der Barwertfunktion.

■ Kumulierende Verzinsung

Ein Investor kaufe eine Zinssammler-Anleihe mit einem Kupon von $p\,\% = \frac{p}{100} = r$ zum Kurs K (für den Nennwert 100) für eine Laufzeit von (vollen) n Jahren.

Wir stellen (als Modell dieses Geschäfts) die zugehörige Zahlungsreihe auf:

$$c = \left(-K,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{(n-1)},\ 100 \cdot (1+r)^n\right)$$

Zu Beginn wird der Preis für die Anleihe eingezahlt. Danach wird über $n-1$ Perioden nichts ein- oder ausgezahlt. Nach n Jahren erscheint der endfällige Auszahlungsbetrag. Anleihen dieses Typs heißen auch *Zerobonds* (wegen der Nullzahlungen zwischen Anfang und Ende).

Wir bestimmen die Rendite r_{int} dieses Geschäfts direkt aus der Gleichung $\mathrm{PV}(c;\, r_{\text{int}}) = 0$, d.h. $-K + \frac{100\cdot(1+r)^n}{(1+r_{\text{int}})^n}$, und erhalten:

$$r_{\text{int}} = (1+r)\sqrt[n]{\frac{100}{K}} - 1$$

Dieser Gleichung entnimmt man unmittelbar die Reziprozität von Kurs und Rendite. Qualitativ ausgedrückt: Steigt der Kurs, so fällt die Rendite (und umgekehrt).

Rechenbeispiel:

Kurs: 100.6, Kupon: 6 %, Laufzeit: 5 Jahre $\Longrightarrow$ Rendite: $r_{\text{int}} = 1.06\sqrt[5]{\frac{100}{100.6}} - 1 = 0.0587\ldots$

Beispiel aus der Praxis:

Bundesschatzbriefe vom Typ B mit einer Laufzeit von 7 Jahren (und i.a. monotoner Folge von Zinssätzen).

■ Einfache Verzinsung

Häufig werden Anleihen einfach verzinst, d.h. die Zinsen werden am Ende jeder Periode ausgeschüttet. Das liefert die folgende Zahlungsreihe:

$$c = \left(-K,\ \underbrace{100\,r,\ \ldots,\ 100\,r}_{(n-1)},\ 100 \cdot (1+r)\right)$$

Anstelle der Nullzahlungen bei Zinssammlern wird Jahr für Jahr der Betrag $100\,r$ ausgezahlt. Am Ende der letzten Periode kommt der Nominalwert 100 noch hinzu.

In diesem Fall gestaltet sich die Auflösung der Gleichung $\mathrm{PV}(c;\, r_{\mathrm{int}}) = 0$ erheblich schwieriger:

$$-K + \frac{100\,r}{1+r_{\mathrm{int}}} + \ldots + \frac{100\,r}{(1+r_{\mathrm{int}})^{n-1}} + \frac{100\,(1+r)}{(1+r_{\mathrm{int}})^{n}} = 0$$

Diese Gleichung wird zweckmäßigerweise wie folgt umgeformt: Man multipliziert mit $(1 + r_{\mathrm{int}})^n$ und fasst die hinter dem ersten Summanden stehenden Glieder zusammen:

$$-K(1+r_{\mathrm{int}})^n + 100\,r\ \{1 + (1+r_{\mathrm{int}}) + \ldots + (1+r_{\mathrm{int}})^{n-1}\} + 100 = 0$$

In den geschweiften Klammern steht eine geometrische Reihe, sodass sich aufsummiert ergibt:

$$\boxed{-K(1+r_{\mathrm{int}})^n + 100\,r\,\frac{(1+r_{\mathrm{int}})^n-1}{r_{\mathrm{int}}} + 100 = 0}$$

Dieses Ergebnis ist im wesentlichen identisch mit der finanzmathematischen Grundgleichung.

(Dabei ist wie folgt zu spezialisieren: $b = 100\,r$, $x_0 = -K$, $x_n = -100$. Man mache sich übungshalber die Bedeutung dieser Wertentsprechungen klar!)

Rechenbeispiel:

Kurs: 100.6, Kupon: 6 %, Laufzeit: 5 Jahre $\Longrightarrow$ Rendite: $r_{\mathrm{int}} = 0.0586\ldots$ (geringfügig niedriger als im Fall einer kumulierenden Anleihe).

Da eine geschlossene Auflösungsformel für r_{int} nicht verfügbar ist, erfolgt die Berechnung gemäß den Hinweisen aus "Die Rendite eines Geldgeschäfts".

Beispiel aus der Praxis:

Bundesschatzbriefe vom Typ A mit einer Laufzeit von 6 Jahren (und i.a. monotoner Folge von Zinssätzen).