

## Die Rendite von Geldgeschäften

"Ich werde ihm ein Angebot machen, das er nicht ablehnen kann."

Der Pate

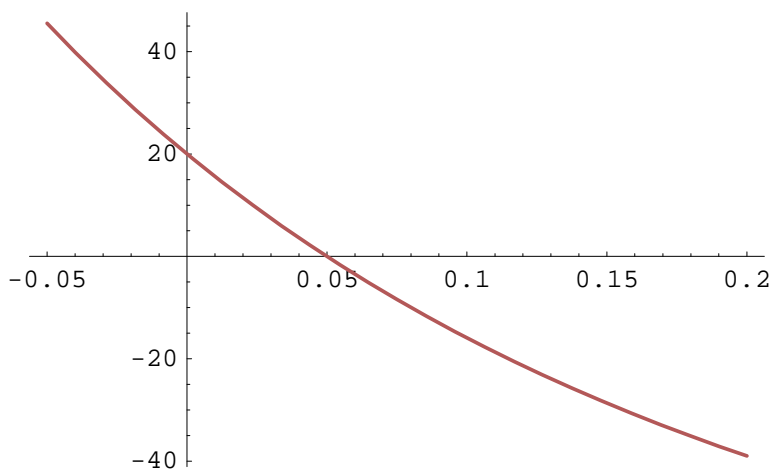
### Problemstellung

Die Bewertung von Zahlungsreihen  $c$  mit Hilfe der Barwertfunktion  $PV$  beruht auf der Annahme eines kalkulatorischen Zinssatzes  $r$  für den betrachteten Zeitraum (u.U. für jede Periode einzeln).

Der "typische" Verlauf von  $PV(c; r)$  (zu fest vorgegebenem  $c$ ) zeigt, dass  $PV$  als Funktion von  $r$  stark variiert. Somit wirkt sich jede Annahme über  $r$  unmittelbar auf das zugehörige Entscheidungsproblem aus (vgl. den letzten Abschnitt aus "Der Barwert einer Zahlungsreihe").

### ■ Demonstrationsbeispiel

```
<< Modellbildung`Diskontierung`  
c = {-100, 20, -50, 70, 80};  
PvGraph[c, -0.05, 0.2];
```



In diesem Beispiel beginnt der Spielraum für positive PV-Werte bei  $r = 0$  und endet bei ca.  $r = 0.05$ .

## ■ Vergleich von Zahlungsreihen ohne Zinsvorgaben

Es ist wünschenswert, Zahlungsreihen auch dann bewerten (und vergleichen) zu können, wenn kalkulatorische Zinsraten nicht zur Verfügung stehen. Der Verzicht auf Zinsvorgaben ist aber schon allein deshalb zweckmäßig, weil damit die Lösung des Entscheidungsproblems nur noch von (den Daten) der Zahlungsreihe selbst, nicht jedoch von dem (variablen) Zinsparameter  $r$  abhängt.

Werfen wir einen Blick auf das obige Demonstrationsbeispiel und fragen: Wann müsste eine Zahlungsreihe höher bewertet werden als die vorliegende?

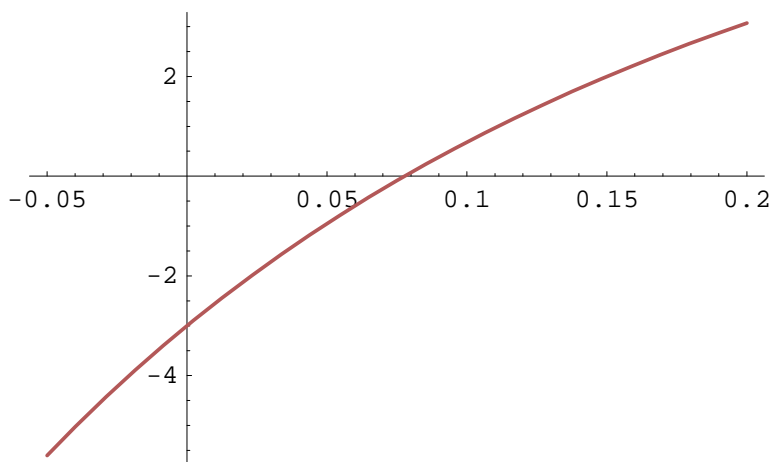
Eine plausible Antwort: Wenn der Spielraum für  $PV \geq 0$  größer ist (hier: der rechte Endpunkt des Intervalls, über dem PV nichtnegativ ausfällt).

Es liegt daher nahe, eine Zinsrate  $r \geq 0$  zu bestimmen, für die  $PV(c; r) = 0$ .

Im obigen Beispiel ergibt sich  $r = 0.0499465 \dots$ . Dieser Wert ist zugleich die größte Zinsrate, bei der (noch)  $PV(c; r) \geq 0$  gilt. Man kann ihn zur Bewertung der gegebenen Zahlungsreihe heranziehen [ein Vorschlag, der in seiner allgemeinen Form zurückgeht auf K. E. Boulding: Time and Investment. In: *Economia* 3 (1936), 196-220].

Enthält eine Zahlungsreihe (z.B. bei Kreditgeschäften) am Anfang Auszahlungen und danach lauter Einzahlungen ("Rückzahlungen"), so steigt die PV-Kurve monoton an:

```
PvGraph[{10, -1, -1, -1, -10}, -0.05, 0.2];
```



In diesem Fall würde der Spielraum für günstige Alternativen durch Verschieben der Nullstelle nach links vergrößert.

## Der interne Zinssatz einer Zahlungsreihe

### ■ Definition

Hat die Gleichung  $PV(c; r) = 0$  eine einzige nichtnegative reelle Lösung  $r$ , so bezeichnet man sie als **interne** (auch: **effektive**) **Zinsrate**  $r_{\text{int}}$  von  $c$ . Der interne Zinssatz von  $c$  wird auch **Rendite** des zugehörigen Geldgeschäfts genannt.

Kommt ein Vertrag zweier Partner zustande, der eine Zahlungsreihe mit der Rendite  $r_{\text{int}}$  nach sich zieht, so ist dies für die Beteiligten ein faïres Geschäft, wenn der Zinssatz bekannt ist und ohne Zwang vereinbart wird.

Die Einzahlungen des ersten Partners sind die Auszahlungen des zweiten, und umgekehrt. Bringt man in der Gleichung  $PV(c; r) = 0$  die (positiven) Auszahlungsterme auf die linke Seite und die (negativen) Einzahlungsterme auf die rechte Seite, so wird ersichtlich, dass die Gesamtzahlungen beider Partner denselben Barwert haben.

### ■ Anwendbarkeit

Die Rendite bzw. interne Zinsrate ist eine theoretische Größe, die beschreibt, wann die Ein- und Auszahlungen eines Geschäfts zum Ausgleich kommen. Ihre Bedeutung für Entscheidungen liegt vor allem darin, dass sie den Bereich der günstigen Handlungsalternativen begrenzt.

Ein Investor kann in der Realität allerdings nicht erwarten, dass die ihm zufließenden Auszahlungen sich in der Laufzeit des Vertrags zu immer demselben (internen) Zinssatz wieder anlegen lassen.

N.B.: Nur unter dieser **Wiederanlageprämisse** stellt sich das Geldgeschäft für die beteiligten Partner als neutral (fair) dar (z.B. der Fall bei entsprechenden vertraglichen Bindungen).

### ■ Anmerkung zu Kreditgeschäften

Die **PangV** (*Preisangabenverordnung*) schreibt vor, den effektiven Zinssatz für Kreditangebote und ähnliche von Banken getätigte Geldgeschäfte allen Vertragspartnern (natürlich insbesondere dem Kunden als Kreditnehmer) offenzulegen.

Bei Effektivzinsangaben zu Kreditgeschäften wird gelegentlich versucht, die PangV mit Verschleierungstaktiken zu unterlaufen. Beliebte ist das Verfahren, den Effektivzins nur für ein Anfangsstück der Zahlungsreihe zu ermitteln. Dadurch ist es einem Kreditnehmer nicht mehr (ohne weiteres) möglich, das Geschäft mit Konkurrenzangeboten zu vergleichen.

In einigen Fällen erfolgt die Darstellung eines "anfänglichen Effektivzinssatzes" explizit und der Situation gehorchend. Wird z.B. eine Immobilie durch einen Bankkredit finanziert und ein Vertrag mit einer Laufzeit von 10 Jahren geschlossen, der keine volle Tilgung der Kreditsumme beinhaltet, so ist die Zahlungsreihe unvollständig. Der Kreditnehmer sollte sich klar machen: Solange kein Plan vorliegt, der beschreibt, wie das Geschäft bis zum Ausgleich sämtlicher Zahlungen abgewickelt werden soll, kann sich der "Effektivzins" auch nur auf das bekannte Anfangsstück der Zahlungsreihe beziehen.

## ■ Existenz und Eindeutigkeit

Man kann mit Blick auf die Praxis einige grundlegende Typen von Zahlungsreihen unterscheiden:

Investition (Standardfall):  $c_0 < 0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1} \geq 0$

Darlehen (Kredit):  $c_0 > 0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1} \leq 0$

Sparen/Versicherung:  $c_0, \dots, c_j \leq 0, c_{j+1}, \dots, c_{N-1} \geq 0$

Grundsätzlich wird bei einer Zahlungsreihe  $c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$  vorausgesetzt:  $c_0 \neq 0, c_{N-1} \neq 0$ .

Für die drei genannten Typen von Zahlungsreihen gilt (hier ohne Beweis mitgeteilt):

### Satz:

1. Es sei  $a_0 = c_0, a_1 = c_0 + c_1, \dots, a_{N-1} = c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1}$  (sog. kumulierte Zahlungsreihe). Wechselt die Folge  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  das Vorzeichen nur einmal, so ist  $r_{\text{int}}$  definiert und positiv (Norströmsche Regel).

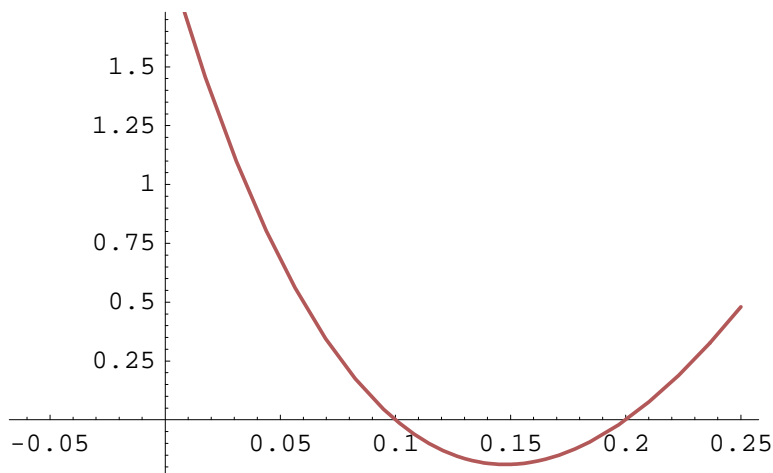
2. Im Standardfall einer Investition ist  $r_{\text{int}}$  eindeutig bestimmt, und es gilt  $r_{\text{int}} > -1$ . Ist die Nettosumme  $c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1} > 0$ , so gilt  $r_{\text{int}} > 0$ .

Grundsätzlich sind Zahlungsreihen mit beliebigen Zahlungen  $c_j$  und Vorzeichenwechseln denkbar. Unter dem Gesichtspunkt der Anwendung sind aber nur Zahlungsreihen von Interesse, die real mögliche Konsequenzen wirtschaftlicher Entscheidungen modellieren.

Auch im allgemeinen Fall lässt sich der Begriff "interner Zinssatz" sinnvoll definieren (allerdings mit mehr begrifflichem und mathematischem Aufwand). Vgl. dazu die sorgfältigen Analysen in [Peter Bender: Die Begrifflichkeit des Bezugsfachs in der angewandten Mathematik und ihrer Didaktik – diskutiert am Beispiel des internen Zinssatzes von Investitionen. In: Journal f. Mathematik-Didaktik 9 (1988) 2/3, S. 205-224]. Bei Bender [Der interne Zinssatz bei beliebigen Investitionen (Preprint Uni Paderborn, 1990)] finden sich Resultate, welche die in dem obigen Satz gemachten Aussagen beträchtlich verallgemeinern.

Wir betrachten als Beispiel einer Zahlungsreihe mit zwei Vorzeichenwechseln  $c_B = (100, -230, 132)$ , deren Barwertgleichung  $PV(c_B; r) = 0$  zwei positive reelle Lösungen besitzt:  $r_1 = 0.1$  und  $r_2 = 0.2$  (vgl. Bender, a.a.O., S. 215).

```
cB = {100, -230, 132};
PvGraph[cB, -0.06, 0.25];
```



Welche der beiden Lösungen kommt als interne Zinsrate in Frage?

Von einer "vernünftigen" Nutzen- bzw. Wertfunktion wird man erwarten, dass sie eine vorteilhaftere Alternative höher bewertet. Wird in  $c_B$  zu Beginn z.B. der etwas größere Betrag 100.1 ausgezahlt, so vergrößert sich  $r_1$  ( $= 0.115 \dots$ ), während sich  $r_2$  ( $= 0.183 \dots$ ) verringert. Insofern kann nur die kleinere Lösung  $r_1$  als interner Zinssatz gedeutet werden.

## Numerische Berechnung von $r_{\text{int}}$

Die Gleichung  $PV(c; r) = 0$  kann im allgemeinen nicht mit einfachen Schulmethoden (wie sie z.B. für quadratische Gleichungen bekannt sind) aufgelöst werden. Elementare Näherungsverfahren führen aber in vielen Fällen schnell zum Ziel. Bequem ist eine auf Computer-Algebra gestützte Berechnung.

### ■ Manuelle Berechnung

Eine einfache Vorgehensweise wird am Beispiel  $c = (-100, 20, -50, 70, 80)$  demonstriert (s.o.). Die zugehörige Gleichung  $PV = 0$  kann nach  $r$  oder (oft einfacher) zunächst nach  $q$  ( $= 1 + r$ ) aufgelöst werden:

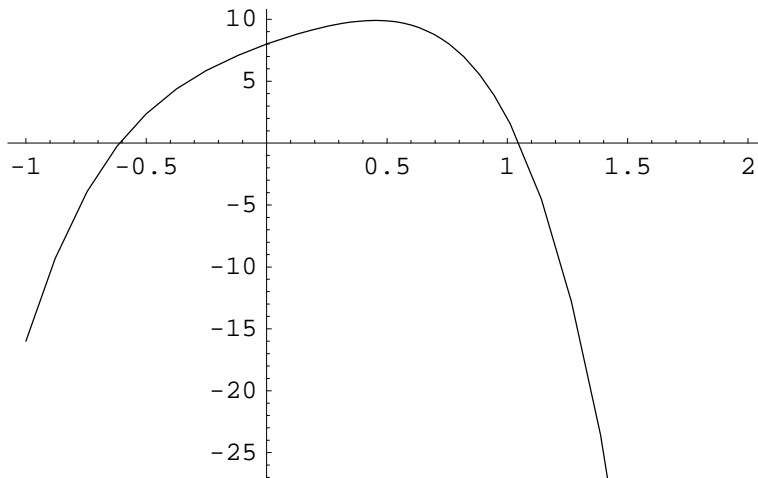
$$-100 + \frac{20}{q} - \frac{50}{q^2} + \frac{70}{q^3} + \frac{80}{q^4} = 0$$

Multiplikation mit dem Nenner der höchsten Potenz liefert:

$$-10q^4 + 2q^3 - 5q^2 + 7q + 8 = 0$$

Es ist zweckmäßig, den Funktionsgraphen des Polynoms auf der linken Seite zu zeichnen, um die Lage der Nullstellen auszumachen:

```
Plot[-10 q^4 + 2 q^3 - 5 q^2 + 7 q + 8, {q, -1, 2}];
```



Von Interesse ist hier nur die Nullstelle zwischen 1.0 und 1.1. Sie lässt sich durch wiederholte Halbierung des Intervalls beliebig genau einschachteln (wenn man das Intervall immer in der Hälfte erneut teilt, in der das Polynom einen Vorzeichenwechsel erleidet). [Zur [Halbierungsmethode](#) und zu weiteren Verfahren vgl. den Abschnitt "Nullstellenbestimmung".]

Die erforderlichen Rechnungen sollten mit einem Taschenrechner durchgeführt werden:

$$1.0 \rightarrow 1.025 \rightarrow 1.0375 \rightarrow 1.04375 \rightarrow 1.046875 \rightarrow \dots$$

Die Nullstelle liegt knapp links vom ersten Halbierungspunkt 1.05 und wird nach einigen Iterationsschritten gut angenähert:  $q = 1.0499465 \dots$ . Hieraus ergibt sich  $r_{\text{int}} = 4.99\%$ .

### ■ Automatische Berechnung

Das *Mathematica*-Paket "Diskontierung" ist zu laden:

```
<< Modellbildung`Diskontierung`
```

Das eingangs dargestellte Demonstrationsbeispiel zeigt, wie die Zahlungsreihe  $c$  definiert und der PV-Funktionsgraph (in Abhängigkeit von der Zinsrate  $r$ ) zu zeichnen ist.

Das zugehörige Polynom in  $r$  kann man sich interessehalber wie folgt verschaffen:

```
ZinsratePolynom[c, r]
```

```
-10 (-2 + 37 r + 59 r^2 + 38 r^3 + 10 r^4)
```

Die Berechnung der Rendite erfolgt mit dem Befehl:

```
Rendite[c, 0]
```

```
{r → 0.0499465}
```

Der zweite Parameter ist der Startwert bei der numerischen Nullstellenbestimmung (nach dem Newton-Verfahren). In vielen Fällen kommt man mit 0 zum Ziel. Bei mehreren Nullstellen (am Funktionsgraphen ersichtlich) wählt man geeignete Startwerte in deren Umgebung.

Alternativ zum Rendite-Befehl kann man versuchen, die Menge aller (komplexen) Nullstellen des Zinsrate-Polynoms zu berechnen:

```
NullstellenZinsratePolynom[c]
```

```
{{r → -1.61127}, {r → -1.11934 - 1.11007 i},  
{r → -1.11934 + 1.11007 i}, {r → 0.0499465}}
```

Der ursprünglich berechnete Rendite-Wert ist hier die einzige positive reelle Lösung.