Unabhängige Versuche. Produktregel

Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen

In der Praxis beobachtet man häufig Zvn. X, Y, ..., die in einem bestimmten Sinn voneinander abhängig sind.

Beispiele:

- X = Monat im Jahr, Y = Niederschlagsmenge
- X = Nikotinkonsum, Y = Lebenserwartung
- X = Altersgruppe, Y = Gefährdung im Straßenverkehr

Tritt ein bestimmtes Ereignis $X = x_1$ ein, so hat dies i.a. Einfluss darauf, welches Merkmal in der Folge bei Y beobachtet wird, d.h. die Wahrscheinlichkeit etwa für $Y = y_1$ ist unter der Bedingung $X = x_1$ (möglicherweise) eine andere als unter der Bedingung $X = x_2$.

Abhängigkeit dieser Art tritt häufig dann auf, wenn die Beobachtungen in Systemen durchgeführt werden, die physikalisch nicht gegeneinander abgeschlossen sind (an den obigen Beispielen offensichtlich).

■ Ein Farbwürfel

Wir werfen einen guten Spielwürfel mit gefärbten Seiten (grün bei den Augenzahlen 3, 4 und 6, sonst rot). Zwei Zvn. werden beobachtet: X = Farbe, Y = Augenzahl.

Der Würfel werde geworfen. Wie wahrscheinlich ist eine 3 ? Da der Würfel gut ist (Laplace-Versuch), lautet die Antwort: $P(Y = 3) = \frac{1}{6}$. Wird beim selben Wurf das Ereignis $X = grün$ beobachtet, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit zu $\frac{1}{3}$. Die Bedingung wird kenntlich gemacht in der Schreibweise:

$$P(Y = 3 \mid X = grün) = \frac{1}{3}$$

Im Übrigen gilt: $P(Y = 3 \mid X = rot) = 0$.

Unabhängige Versuche

Dass zwei Zvn. X, Y unabhängig sind, lässt sich durch die Forderung ausgedrücken: $P(X = x \mid Y = y) = P(X = x)$ für alle Merkmale x, y (die jeweils von X bzw. Y angenommen werden können).

Eine genauere Definition der sog. bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X = x \mid Y = y)$ soll an dieser Stelle unterbleiben. Sie muss in der Anwendungspraxis auch keineswegs immer überprüft werden. Gehören die Zvn. zu Systemen, die gegeneinander abgeschlossen sind, so heißt dies: kein Ereignis $Y = y$ übt eine Wirkung auf das System aus, in dem X beobachtet wird. Mithin stimmen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X = x \mid Y = y)$ bei variierendem y sämtlich überein.

Wir klären den Sachverhalt am Beispiel von Laplace-Versuchen.

■ Beispiel 1

Wir betrachten zwei Versuche:

Z_1: Werfen eines normalen Spielwürfels (mit $X =$ Augenzahl)

Z_2: Werfen einer Münze (mit $Y =$ Münzseite [Wappen, Zahl])

Z_1 und Z_2 denke man sich zu einem Gesamtversuch kombiniert. Es ist völlig klar, dass Würfelwurf und Münzwurf sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die Zvn. X, Y sind unabhängig, weil die Teilversuche, zu denen sie gehören, unabhängig (im physikalischen Sinn) sind. Dabei spielt es keine Rolle, ob Z_1 und Z_2 gleichzeitig oder nacheinander ausgeführt werden.

■ Beispiel 2

Wir führen den Versuch Z_1 zweimal hintereinander durch. Es sei X die Augenzahl im ersten, Y die Augenzahl im zweiten Wurf.

Auch in diesem 2-stufigen Versuch sind die Zvn. unabhängig, obwohl sie am selben Gerät beobachtet werden. Abhängigkeit würde hier ja bedeuten, dass ein realisiertes Ergebnis ein künftiges Ergebnis beeinflusst. Bei einem guten Spielwürfel ist das nicht der Fall. Würde er sich aber z.B. beim Werfen in nennenswertem Ausmaß verformen, so hinge ein Wurfergebnis durchaus von den bisherigen Verformungen ab.

■ Anmerkungen

Manchen Menschen leuchtet die Unabhängigkeit wiederholter Versuche nicht in letzter Konsequenz ein, z.B. Roulette-Spielern, die glauben, dass nach einer längeren Serie Schwarz die Farbe Rot immer wahrscheinlicher werde.

Angenommen, bei 20-maliger Durchführung von Z_1 erscheint ausnahmslos eine Sechs. Anstatt zu glauben, es sei nun Zeit für eine andere Augenzahl, ist es in diesem Fall vernünftiger anzunehmen, dass der Spielwürfel manipuliert ist (und sich weiterhin nicht wie ein Laplace-Gerät verhält). Mit der Prüfung solcher Hypothesen beschäftigt sich die Statistik.

Produktregel

Wir betrachten den kombinierten Versuch aus **Beispiel 1** und fragen nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

Z_1 hat den Ausgang "4" und Z_2 hat den Ausgang "Wappen"

Dasselbe lässt sich mit Hilfe der Zvn. X, Y formal wie folgt wiedergeben:

$X = 4 \wedge Y = Wappen$

Bereits bekannt ist $P(X = 4) = \frac{1}{6}$, $P(Y = Wappen) = \frac{1}{2}$.

Hieraus errechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch Produktbildung:

$$P(X = 4 \wedge Y = Wappen) = P(X = 4) \cdot P(Y = Wappen) = \frac{1}{12}$$

Die hier benutzte Produktregel gilt für unabhängige Ereignisse.

Um das einzusehen, verschaffen wir uns zunächst einen Merkmalraum Ω für den Gesamtversuch. Dessen Merkmale bestehen aus allen geordneten Paaren (x, y) mit $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $y \in \{Wappen, Zahl\}$. Es ist also

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{Wappen, Zahl\}$$

Insgesamt erhalten wir 12 "kombinierte" Merkmale. Da sie gleichwahrscheinlich sind, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für $(4, Wappen)$ zu $\frac{1}{12}$.

■ Definition

In Anlehnung an diese Überlegung bei Laplace-Versuchen definieren allgemeiner wir die **Unabhängigkeit zweier Elementarereignisse** $X = x$ und $Y = y$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p = P(X = x)$ und $q = P(Y = y)$ wie folgt:

$$P(X = x \wedge Y = y) = p \cdot q$$

Der Sachverhalt lässt sich auf Ereignisse allgemein übertragen (und auch hier nicht beschränkt auf Laplace-Versuche). Sind A, B irgendwelche Ereignisse, so bezeichnen wir mit $A\,B$ das Ereignis "A und B" (Produktereignis).

Produktregel

Sind A, B unabhängige Ereignisse, so gilt $P(A\,B) = P(A) \cdot P(B)$.

Beweis:

Seien $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ die Ereignisse (als Merkmalmengen hingeschrieben) und p_i, q_j die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Merkmale x_i bzw. y_j. Das Produktereignis $A\,B$ tritt genau dann ein, wenn ein Merkmal (x_i, y_j) $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ beobachtet wird. Letzteres geschieht wegen der Unabhängigkeit mit der Wahrscheinlichkeit $p_i\,q_j$. Nach zweimaliger Anwendung der Summenregel ergibt sich damit:

$$P(A\,B) = \sum_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} p_i\,q_j = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right) = P(A) \cdot P(B)$$

■