
Wahrscheinlichkeiten

Elementare Wahrscheinlichkeiten

■ Allgemeine Vorbemerkungen

Der *Begriff der Wahrscheinlichkeit* bezieht sich auf unsichere Ereignisse bzw. Aussagen. Dazu gehören u.a.

- Ausfälle (Ergebnisse) von wiederholbaren Zufallsversuchen (z.B. Würfelwurf, Münzwurf)
- einmalige Ereignisse in der Zukunft (z.B. bei der Wettervorhersage)
- Hypothesen über Sachverhalte, die sich nicht unmittelbar überprüfen lassen (z.B. Ursache einer Krankheit).

Der Begriff "Zufallsversuch" (Z-Versuch) wird im Folgenden synonym mit dem Begriff "Versuch" gebraucht, betont dabei aber die Tatsache, dass es unsicher ist, welches Ergebnis (Merkmal) nach der Versuchsdurchführung zu beobachten sein wird.

Eine Wahrscheinlichkeit p (lat. *probabilitas*) wird durch eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 wiedergegeben. Für Anwendungen ist zu erklären, was es bedeutet, dass ein bestimmtes Ereignis A die Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$ erhält.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt die Frage, nach welchen Regeln (bzw. mit welchen Modellen) sich Wahrscheinlichkeiten aus anderen (bereits bekannten!) Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Es handelt sich im Kern um ein innermathematisches Problem.

Eine überwiegend außermathematische Frage ist die nach den "ersten" Wahrscheinlichkeiten; das sind diejenigen, die sich nicht (jedenfalls nicht ohne weiteres) auf grundlegendere Wahrscheinlichkeiten zurückführen lassen. Diese Problematik fällt in die Zuständigkeit von Physik, Statistik oder Entscheidungstheorie.

Stochastik ist eine zusammenfassende Bezeichnung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

■ Wahrscheinlichkeiten für elementare Ereignisse

Vom Standpunkt der Anwendung aus verdient das folgende fundamentale Problem besondere Aufmerksamkeit:

Ein Zufallsversuch habe die möglichen Ausgänge $x_1, x_2, x_3, \dots \in \Omega$.

Wie gelangt man zu Wahrscheinlichkeiten p_i für die zugehörigen Elementarereignisse $X = x_i$?

Wir betrachten (der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit) Z-Versuche mit zwei Ausgängen: $\Omega = \{x_1, x_2\}$. Es genügt, die Wahrscheinlichkeit $p_1 = P(X = x_1)$ für das Auftreten von x_1 zu bestimmen (da sich beide Wahrscheinlichkeiten zu 1 ergänzen: $p_1 + p_2 = 1$).

Jemand behauptet: $p_1 = 0.5$

Was kann eine solche Wahrscheinlichkeitsaussage bedeuten?

Es gibt mehrere (ihrer Natur nach grundsätzlich verschiedene) Möglichkeiten, einer solchen Aussage einen Sinn beizulegen.

1. Physikalische Deutung

Man betrachtet den Versuch als einen (im Prinzip) physikalisch beschreibbaren Vorgang. Zwar lässt sich ein individueller Ausgang nicht vorhersagen, doch aufgrund bekannter (oder angenommener) Symmetrien werden Wahrscheinlichkeiten als objektive, der Versuchsvorrichtung innewohnende Eigenschaften ("Neigungen") aufgefasst.

Beim Wurf einer Münze ist keine der beiden Seiten physikalisch ausgezeichnet. Die Annahme, die Ergebnisse "Wappen" und "Zahl" seien gleichwahrscheinlich, führt auf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Versuche mit gleichwahrscheinlichen Ausgängen heißen Laplace-Versuche. Sie beruhen in den meisten Fällen auf Geräten mit eingebauter Symmetrie: Münze, Spielwürfel, Roulette, etc. Wo solche Symmetrien nicht gezielt hergestellt (und technisch kontrolliert) werden, ist die Annahme von Gleichwahrscheinlichkeit vielfach problematisch (z.B. bei der Laplace-Regel, vgl. "Entscheidungen bei Unsicherheit"). Z.B. ist das Geschlecht eines Neugeborenen ist keine gleichverteilte Zufallsvariable.

2. Frequentistische Deutung

Auch in dieser Deutung ist die Wahrscheinlichkeit eine objektive Eigenschaft. Sie wird jedoch gemessen (geschätzt), indem man eine längere Versuchsreihe durchführt und die relative Häufigkeit des in Frage stehenden Merkmals x_1 in der Stichprobe bestimmt. Ihr Wert liegt in der Nähe der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche empirische Messung ist auch bei Laplace-Versuchen sinnvoll. Nach einer großen Zahl von Münzwürfen wird sich eine ungefähre Gleichverteilung einstellen, und die relativen Häufigkeiten erscheinen so als Näherungswerte der theoretischen Apriori-Wahrscheinlichkeit 0.5.

Werfen wir statt einer Münze eine Reiszwecke, so liefert die physikalische Deutung keinen plausiblen theoretischen Wert, und es bleibt allein die Möglichkeit eines Massenexperiments.

Die frequentistische Deutung ist natürlich nicht anwendbar, wenn sich die Wahrscheinlichkeitsaussage auf einen einmaligen, nicht wiederholbaren Versuch bezieht (z.B. Stichwahl zweier Staatspräsidenten).

3. Epistemische Deutung

Die epistemische Deutung macht auch bei einmaligen Ereignissen Sinn. Ihr zufolge drückt nämlich die Wahrscheinlichkeit den Grad aus, in dem eine Person an etwas glaubt, wodurch sie als eine Eigenschaft des Wissens (gr. *episteme*) erscheint, das die betreffende Person über die Welt hat.

Die Wahrscheinlichkeit, die zu einer Person gehört, kann durch ihr Wettverhalten gemessen werden. Ist z.B. jemand bereit, 1 € auf x_1 ("Wappen" einer Laplace-Münze) zu setzen, um im Erfolgsfall 2 € zurück zu erhalten, so ist diese 1:1-Wette ein Äquivalent zur Wahrscheinlichkeitsaussage $p_1 = 0.5$. – Ebenso gut kann man einer Wette darüber, wie die Stichwahl zweier Kandidaten ausgeht, die subjektiven Glaubensgrade der Wettenden entnehmen.

Wird statt der Münze eine Reiszwecke geworfen, so könnte man z.B. mit einer 1:2-Wette beginnen. Nach einigen Versuchen mag es ratsam erscheinen, das Wettverhältnis (und damit die Wahrscheinlichkeiten) an den Informationsstand anzupassen und auch weiterhin zu revidieren. Auf diese Weise – das kann hier nur angedeutet werden – lässt sich die frequentistische Auffassung mit der epistemischen Deutung der Wahrscheinlichkeit verbinden (sog. Bayes-Statistik).

■ Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Sei X eine Zufallsvariable, welche die Werte (Merkmale) $x_1, x_2, x_3, \dots \in \Omega$ annehmen kann. Die relativen Häufigkeiten h_i der Ereignisse $X = x_i$ bilden die Häufigkeitsverteilung von X (in einer Stichprobe). In Analogie dazu wird die Folge der Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (kurz: **W-Verteilung**) von X genannt. Der Bezug auf eine Stichprobe entfällt hier.

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

■ Definition (Summenregel)

In derselben Weise wie der Begriff der relativen Häufigkeit lässt sich auch der Begriff der Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen (Merkmalen) auf beliebige Ereignisse (Mengen von Merkmalen) erweitern. Die naheliegende Definition erfolgt ebenfalls mit Hilfe der Summenregel:

Besteht ein Ereignis $A (\subseteq \Omega)$ aus genau den Merkmalen x_1, \dots, x_n mit bekannten Elementarwahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n , so ist die Wahrscheinlichkeit p von A definiert durch: $p = P(A) = p_1 + \dots + p_n$.

D.h.: Ist eine W-Verteilung über dem Merkmalraum Ω festgelegt, so sind die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse A (Teilmengen von Ω) bestimmt.

Beispiel:

In einem Kasten liegen vier Kugeln; drei davon sind farbig (rot, grün, gelb), eine ist weiß. Das verdeckte Ziehen einer Kugel ist ein Laplace-Versuch, d.h. eine bestimmte Kugel zu ziehen, besitzt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Bezeichne A das Ereignis, eine farbiges Kugel zu ziehen: $A = \{\text{rot, grün, gelb}\}$.

Dann gilt nach Definition: $P(A) = P(\text{rot}) + P(\text{grün}) + P(\text{gelb}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

■ Einfache Folgerungen

Das Ereignis, dass A nicht eintritt, wird **Komplementär-** oder **Gegenereignis** genannt und mit \bar{A} bezeichnet. Es gilt stets: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{A}) = q = 1 - p$ heißt **Gegenwahrscheinlichkeit**.

Sind A und B zwei unverträgliche Ereignisse, so bezeichnet $A + B$ das Ereignis, dass sich (entweder) A oder B realisiert. Aus der Summenregel folgt sofort: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Das Ereignis $A + \bar{A}$ (im obigen Beispiel: Ziehen einer farbigen Kugel oder einer weißen Kugel) hat die Wahrscheinlichkeit 1 (**sicheres** Ereignis). Das Ereignis, eine blaue Kugel zu ziehen, hat die Wahrscheinlichkeit 0 (**unmögliches** Ereignis).

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P gelten dieselben Grundaussagen wie für die relative Häufigkeit H_S :

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ für alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$
3. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Beweis: Wörtlich wie für H (mittels Summenregel). ■