
Zufallsvariablen

Zufallsvariablen. Merkmale

Der Begriff **Zufallsvariable** (Zv.) wird hier sinngleich mit "Beobachtungsgröße" verwendet (vgl. den Abschnitt "Beobachtungsgrößen im Beispiel"). Bei einem Messvorgang ist das Ergebnis zunächst nicht bekannt und kann daher als zufällig (in einem weitergefassten Sinn) angesehen werden.

Wir notieren Zvn. mit großen lateinischen Buchstaben: X, Y, Z, \dots , die Merkmale zumeist mit entsprechenden Kleinbuchstaben. Die Gleichung $X = x_3$ beschreibt das Ereignis, dass X den Wert x_3 annimmt.

■ Beispiele

Bsp. 4: X bezeichne die Zv. "Familienstand": $X = \textit{verheiratet}$

Bsp. 7: Y bezeichne die Zv. "Länge": $Y = 12$ (mm)

Bsp. 10: Z bezeichne die Zv. "Wartezeit": $Z = 3$

Die zu betrachtenden Merkmale x soll in folgendem Sinn als elementar vorausgesetzt werden: Es gibt kein von x verschiedenes Merkmal x' derart, dass das Ereignis $X = x$ das Ereignis $X = x'$ nach sich zieht.

Schließen sich die Ereignisse $X = x$ und $X = x'$ gegenseitig aus, so heißen die Merkmale x, x' unverträglich (oder: disjunkt).

Merkmalausprägungen

Die Merkmale einer Zvn. X können unterschiedlich beschaffen sein:

- Die Werte von X sind Maßzahlen (i.a. reelle Zahlen). Man spricht von **quantitativen** Merkmalen.
Beispiele: 2, 3, 7, 10.
- Die Werte von X lassen eine Rangfolge (Anordnung) zu. Man spricht von **ordinalen** Merkmalen.
Beispiele: 1, 8, 9.

▸ Die Werte von X dienen der Unterscheidung von Dingen. Man spricht von **nominalen** Merkmalen.
Beispiele: 4, 5, 6.

Ein ordinales Merkmal kann auch nominal, ein quantitatives Merkmal auch ordinal (und erst recht nominal) aufgefasst werden.

N.B.: Wird ein Merkmal durch ein Zahlwort bezeichnet, so schließt das keineswegs seine quantitative Natur ein.

■ Beispiele

1. Steuerklassen sind nominale Merkmale. Hausnummern sind ordinale Merkmale.

2. Die Schulnoten ('1' bis '6') sind ordinale Werte; man kann mit ihnen eine Rangfolge herstellen, aber nicht ohne weiteres auch rechnen. Nichtsdestoweniger addiert man Noten und bildet ihre arithmetischen Mittel, die dann Noten "neuer Art" bilden. Allerdings dürfte eine Gleichung wie $3 - 2 = 5 - 4$ in der Praxis mit Fug und Recht bezweifelt werden.

3. Die Augenzahlen beim Würfelwurf sind zunächst nur nominal. Wenn der Sachzusammenhang (z.B. ein Spiel wie "Mensch ärgere dich nicht") eine Wertung nahelegt, werden sie zu ordinalen Merkmalen ('6' > '5' > ... > '1'). Erlaubt man zusätzlich z.B. ihre Addition, so kommt auch der quantitative Aspekt ins Spiel.

Merkmalräume

Eine Menge Ω , die alle (elementaren, untereinander unverträglichen) Merkmale einer Zvn. X enthält, nennen wir **Merkmalraum** von X (bzw. des zu X gehörigen Versuchs). Ebenfalls geläufige Bezeichnungen sind u.a.: "Stichprobenraum", "Ergebnismenge" oder "Ausfallmenge".

Bei der Modellierung eines Versuchs wird man anstreben, in den Merkmalraum nur tatsächlich auftretende Werte der Zvn. aufzunehmen, z.B. bei einem Spielwürfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In einigen Fällen kann dies jedoch zu künstlichen Einschränkungen führen, etwa im Beispiel 2 ("Hühnerei"). Es ist hier bequemer (und sinnvoll wegen des im Grunde stetigen Wertverlaufs), Ω als reelles Intervall ($\Omega = [0; 100]$ oder $\Omega = \mathbb{R}$) zu definieren, auch wenn dabei Werte einbezogen werden, die von der Zvn. "Gewicht eines Hühnereis" niemals angenommen werden.

Unendliche Merkmalräume treten nicht nur bei stetigen Wertverläufen der Zvn. auf. Die Zv. "Wartezeit" in Beispiel 10 ist eine diskrete Größe mit möglichen Werten 1, 2, 3, ... Große Werte sind zwar unwahrscheinlich, man kann sie jedoch nicht von vornherein ausschließen. Daher ist der unendliche Merkmalraum $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ zu Grunde zu legen.

Sprechweise: Bei einem endlichen Merkmalraum Ω heißt die Anzahl $m = |\Omega|$ "Anzahl der möglichen Fälle" (für den Ausgang des Versuchs).

■ Weitere Beispiele

Bsp. 3: $\Omega = \mathbb{R}^+$

Bsp. 4: $\Omega = \{ \text{'ledig'}, \text{'verheiratet'}, \text{'verwitwet'} \}$

Bsp. 8: $\Omega = \{ \text{'sehr gut'}, \text{'gut'}, \text{'befriedigend'}, \text{'ausreichend'}, \text{'mangelhaft'}, \text{'ungenügend'} \}$

Ereignisse und ihre Beschreibung

Mit den bisher entwickelten Sprachmitteln lassen sich auf einfache Weise Ereignisse beschreiben, die bei der Durchführung eines Versuchs realisiert werden.

Im Folgenden werden die diesbezüglichen Erklärungen am Beispiel 5 (Spielwürfel) illustriert: Zv. X (Augenzahl), Merkmalraum $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

■ Elementarereignisse

Das Ereignis "4 wird geworfen" ist elementar, sofern bei der Zv. nur zu prüfen ist, ob das einzelne Merkmal '4' angenommen wird: $X = 4$.

Allgemein sind Elementarereignisse von der Form $X = x_i$.

■ Zusammengesetzte Ereignisse

Das Ereignis "Eine gerade Augenzahl wird geworfen" ist zusammengesetzt, sofern zu prüfen ist, ob das Merkmal '2' oder das Merkmal '4' oder das Merkmal '6' angenommen wird: $X = 2 \vee X = 4 \vee X = 6$.

Auch die Negation eines Elementarereignisses ist (i.a.) zusammengesetzt, z.B. "Es wird keine 4 geworfen" ($X \neq 4$): $X = 1 \vee X = 2 \vee X = 3 \vee X = 5 \vee X = 6$.

Mit aussagenlogischen Verknüpfungen (Negation: \neg , "nicht"; Adjunktion: \vee , "oder"; Konjunktion: \wedge , "und"; etc.) lassen sich aus bereits definierten Ereignissen beliebige weitere zusammensetzen.

Liegen ordinale oder quantitative Merkmale vor, so bieten die Relationen \leq , \geq , $<$, $>$ bzw. Operationen wie $+$, $-$, \cdot , etc. zusätzliche Möglichkeiten der Zusammensetzung, z.B. $X \geq 3$ ("mindestens drei Augen") oder: $X \bmod 2 = 0$ ("gerade Anzahl von Augen").

■ Die Merkalmenge eines Ereignisses

Ein Ereignis lässt sich durch die Menge der Merkmale charakterisieren, die X zu seiner Realisierung annehmen kann. Z.B. gehört zum Ereignis "gerade Anzahl von Augen" die Merkalmenge $A = \{2, 4, 6\}$. Die **Merkalmenge** (oder: **Extension**) eines Ereignisses ist eine Teilmenge von Ω .

Sprechweisen:

Ereignisse mit der Extension \emptyset heißen "unmöglich".

Ereignisse mit der Extension Ω heißen "sicher".

Ein Merkmal aus der Extension A eines Ereignisses heißt "günstiger Fall" (für A), entsprechend $|A|$ "Anzahl der günstigen Fälle" des Ereignisses.