

Bernoulli-Räder

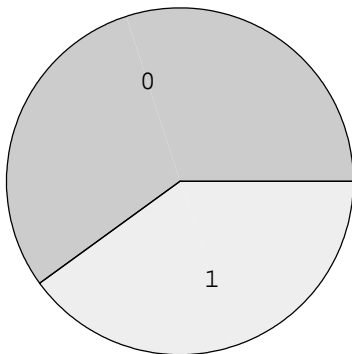
Bernoulli-Räder (im Folgenden auch "Glückräder" genannt) sind Simulationsmodelle für Zufallsversuche, deren Ausgänge nicht notwendig gleichverteilt sind.

Im Folgenden benötigte Packages:

```
<< Graphics`Graphics`  
<< Modellbildung`Verteilungen`
```

Bernoulli-Rad mit 2 Sektoren

Das einfachste Glücksrade besitzt zwei Sektoren: 0 und 1, die im allgemein verschieden groß sind.



Wir stellen uns einen Zeiger vor, der sich um das Zentrum dreht. Es bezeichne p_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er in Sektor i stehen bleibt. Da in der Beispiel-Figur Sektor 0 doppelt so groß ist wie Sektor 1, ergibt sich $p_0 = \frac{2}{3}$, $p_1 = \frac{1}{3}$.

Häufig benutzte Bezeichnungen: Der Versuchsausgang 1 heißt **Treffer** (Erfolg), entsprechend 0 **Fehlschlag** (Misserfolg); p ist die Treffer-Wahrscheinlichkeit, $q (= 1 - p)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlschlag.

Einmaliges Drehen des Bernoulli-Rades entspricht einem Aufruf von **Random[]**, der als Treffer gewertet wird, wenn das Ergebnis $< p$ ist, sonst als Fehlschlag:

```
p = 1 / 3;
If[Random[] < p, 1, 0]
```

```
0
```

Wir simulieren 1000 Drehungen und vergleichen die Häufigkeitsverteilung in der entstehenden Stichprobe mit der W-Verteilung $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$:

```
br = Table[If[Random[] < p, 1, 0], {1000}];
```

```
RelHVerteilung[{0, 1}, br] // N
```

```
{0.675, 0.325}
```

Es liegt nahe, das mehrfache Drehen eines Bernoulli-Rades durch folgende Funktion wiederzugeben:

```
BernoulliRad[p_, anzahl_] := Table[If[Random[] < p, 1, 0], {anzahl}]
```

Bernoulli-Rad mit n Sektoren

Eine Verallgemeinerung des obigen Bernoulli-Rads ist das **Bernoulli-Rad ("Glücksrad") mit n Sektoren** 1, 2, ..., n und zugehöriger W-Verteilung (p_1, p_2, \dots, p_n) . Wir bezeichnen es kurz als (p_1, p_2, \dots, p_n) -Glücksrad.

Wie beim Glücksrad mit zwei Sektoren stellen wir die Wahrscheinlichkeit p_1 durch das Intervall $[0, p_1)$ dar, die Wahrscheinlichkeit p_2 durch das sich daran anschließende Intervall $[p_1, p_1 + p_2)$, ferner p_3 durch $[p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3)$, usw. Die so definierten n Intervalle haben beziehentlich die Längen p_1, p_2, p_3, \dots und bilden eine Zerlegung von $[0,1)$. Damit ist die sektorale Zerlegung des Kreises auf das Einheitsintervall abgebildet. Wir können eine Drehung des Glücksrads daher wie folgt modellieren: Liefert **Random[]** den Wert r , so suchen wir das (eindeutig bestimmte) Intervall, in dem r liegt:

$$p_1 + \dots + p_{i-1} \leq r < p_1 + \dots + p_{i-1} + p_i$$

Es ist dann i die Nummer des angezeigten Sektors.

In der folgenden Hilfsfunktion bezeichnen **a** und **b** die linke bzw. rechte Intervallgrenze für r beim Durchlaufen der Intervallfolge; **pvert** ist die zu Grunde liegende W-Verteilung:

```
Sektor[r_, pvert_] := Module[{n = Length[pvert], i = 1, a = 0, b = pvert[[1]]},
  While[Not[a ≤ r < b],
    i++;
    a = a + pvert[[i - 1]];
    b = b + pvert[[i]];
  ]
  i
]
```

Ein Testaufruf mit 4 Sektoren:

```
r = Random[]  
sektor[r, {0.1, 0.3, 0.2, 0.4}]
```

```
0.283578
```

```
2
```

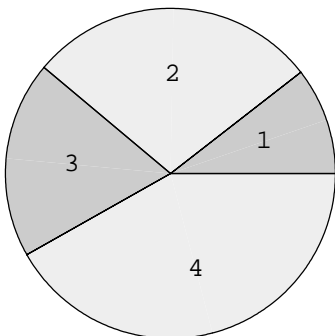
Damit lässt sich das mehrmalige Drehen eines Glücksrads mit vorgegebener W-Verteilung simulieren:

```
Gluecksrad[pvert_, anzahl_] := Table[Sektor[Random[], pvert], {anzahl}]
```

Wir drehen 1000-mal:

```
gr = Gluecksrad[{0.1, 0.3, 0.2, 0.4}, 1000];  
RelHVerteilung[{1, 2, 3, 4}, gr] // N  
KreisDiagramm[{1, 2, 3, 4}, gr]
```

```
{0.105, 0.284, 0.193, 0.418}
```



Mehrstufige Bernoulli-Versuche

Das Drehen eines Bernoulli-Rads (gleichgültig mit wie vielen Sektoren und gleichgültig, ob simuliert oder real durchgeführt) nennen wir einen (einstufigen) Bernoulli-Versuch. Bernoulli-Versuche, die gleichzeitig mit verschiedenen Glücksrädern oder hintereinander mit demselben Glücksrad durchgeführt werden, betrachten wir als unabhängige Zufallsversuche.

Im Folgenden legen wir ein (p, q) -Bernoulli-Rad mit den Sektoren "Treffer" (1) bzw. "Fehlschlag" (0) zu Grunde und realisieren einen N -**stufigen Versuch**, indem das Rad N -mal hintereinander gedreht wird (oder dazu gleichwertig: N baugleiche Räder gleichzeitig gedreht werden). Die Versuchsergebnisse sind N -gliedrige Folgen bestehend aus den Ziffern 0 und 1.

Wir interessieren uns für die Zufallsvariable $X = \text{Anzahl der Treffer}$. Sie ist als Summe unabhängiger Zvn. darstellbar: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Dabei ist X_i das Ergebnis (0 oder 1) des i -ten Teilversuchs.

Es soll die Wahrscheinlichkeit einiger Ereignisse bestimmt werden, die sich mittels X beschreiben lassen.

■ Lauter Treffer

Eine Trefferserie besteht aus N Treffern: 1, 1, ..., 1, d.h. $X = N$. Nach der Produktregel hat dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit p^N :

$$P(X = N) = p^N$$

■ Mindestens ein Treffer

Eine Serie von N Fehlschlägen hat (analog zur Trefferserie) die Wahrscheinlichkeit q^N . Es ist also $1 - q^N = 1 - (1 - p)^N$ die Wahrscheinlichkeit für $X \neq 0$, d.h. für das Ereignis, dass nicht lauter Fehlschläge auftreten. Dies ist gleichbedeutend mit dem Ereignis $X \geq 1$, dass mindestens ein Treffer erzielt wird:

$$P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^N$$

■ Genau k Treffer: $X = k$

Wir nehmen zunächst an, dass k Treffer vorneweg und danach sämtliche $N - k$ Fehlschläge hintereinander auftreten:

$$\underbrace{1 \dots 1}_k \underbrace{0 \dots 0}_{N-k}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist (wiederum nach der Produktregel) $p^k \cdot q^{N-k}$. Für jede andere Platzierung der k Treffer erhalten wir dieselbe Wahrscheinlichkeit.

Nun lassen sich von den N in der Folge vorhandenen Plätzen die k Plätze für die Treffer auf $\binom{N}{k}$ Weisen festlegen.

Nach der Summenregel ergibt sich damit als Wahrscheinlichkeit für das Ereignis " k Treffer":

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$