Wartezeiten-Verteilung
(geometrische Verteilung)

Die Zufallsvariable "Wartezeit"

Ein (p, q)-Glücksrad wird solange gedreht bis ein Treffer erscheint. Geschieht dies beim n-ten Versuch, so nennt man n die **Wartezeit** für einen Treffer. Wir verwenden eine Zufallsvariable Z und schreiben $Z = n$.

Das Ereignis $Z = n$ lässt sich so beschreiben: Zunächst werden $n - 1$ Fehlschläge realisiert, anschließend ein Treffer: $\underbrace{0 \ldots 0}_{n-1} 1$. Nach der Produktregel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(Z = n) = (1 - p)^{n-1}\, p$$

Welche Werte n kann Z annehmen? Natürlich $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dabei lässt sich (jedenfalls theoretisch) kein größter Wert angeben, der diese Folge beschränkt. Zum einen resultieren für kleines p große Wartezeiten. Zum anderen ist, etwa für $p = 0.5$, kein Grund ersichtlich, der eine Versuchsvorrichtung zwingen könnte, innerhalb einer vorgeschriebenen Versuchsanzahl einen Treffer zu realisieren. Bei unabhängigen Versuchen ereignen sich Treffer und Fehlschlag jedesmal mit derselben Wahrscheinlichkeit. – Somit ist der Merkmalraum von Z als Menge der positiven ganzen Zahlen anzusetzen.

Die geometrische Verteilung

Wir verschaffen uns einen Eindruck vom Verlauf der sog. **geometrischen Verteilung** (wie die W-Verteilung der Wartezeiten auf einen Treffer auch genannt wird).

Die folgende Funktion berechnet die Wahrscheinlichkeit für $Z = n$ nach obiger Formel:

```
GW[p_, n_] := (1 - p) ^ (n - 1) * p
```

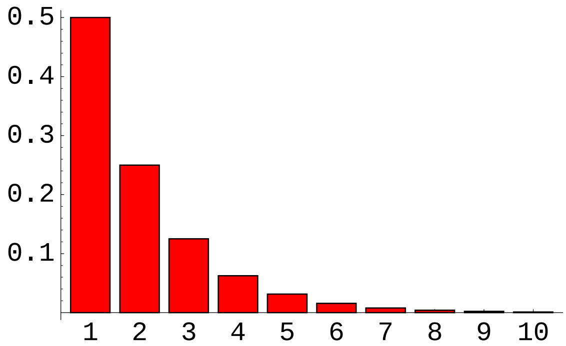
Wir legen eine Tabelle an für $p = 0.5$, wobei n von 1 bis 10 läuft:

```
gwtab = Table[GW[0.5, n], {n, 1, 10}]
```

```
{0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625,
 0.0078125, 0.00390625, 0.00195313, 0.000976563}
```

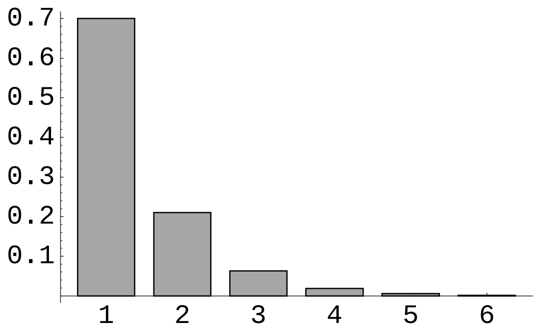
Das zugehörige Schaubild:

```
BarChart[gwtab, BarLabels → {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}];
```



Das Paket **`Verteilungen.m`** enthält die Funktion **`GeomVerteilung`**, die zu gegebener Treffer-Wahrscheinlichkeit p die theoretische W-Verteilung zugleich berechnet und als Stabdiagramm ausgibt.

```
GeomVerteilung[0.7]
```




```
{0.7, 0.21, 0.063, 0.0189, 0.00567, 0.001701}
```

Simulation eines Wartezeiten-Versuchs

Ein einfacher Weg zur empirischen Untersuchung der Wartezeiten-Verteilung: Man dreht viele Male ein Glücksrad.

```
brtab = BernoulliRad[0.4, 100]
```

```
{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1,
 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1,
 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1}
```

Aus der Ergebnisliste stellen wir eine Liste (als Stichprobe für Z) her, in der die aufgetretenen Wartezeiten verzeichnet sind. Dazu bestimmen wir zunächst die Positionen der Treffer "1":

```
posliste = Flatten[Position[brtab, 1]]
```

```
{1, 2, 10, 12, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30,
 31, 34, 35, 36, 37, 45, 48, 53, 56, 60, 61, 63, 68, 69, 70,
 71, 75, 76, 77, 78, 79, 85, 88, 91, 95, 96, 97, 98, 100}
```

und berechnen die Wartezeiten als die Differenzen benachbarter Positionen:

```
zliste = Table[posliste[[i + 1]] - posliste[[i]], {i, 1, Length[posliste] - 1}]
```

```
{1, 8, 2, 7, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 8, 3,
 5, 3, 4, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 6, 3, 3, 4, 1, 1, 1, 2}
```

In der Liste fehlt das erste Element, das bei dem Differenzenverfahren verloren geht. Wir fügen es nachträglich hinzu:

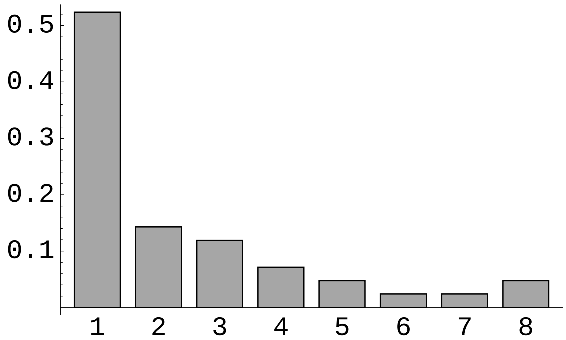
```
zliste = Join[{posliste[[1]]}, zliste]
```

```
{1, 1, 8, 2, 7, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 8, 3,
 5, 3, 4, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 6, 3, 3, 4, 1, 1, 1, 2}
```

Damit haben wir die Stichprobe hergestellt, in der die Häufigkeitsverteilung der Wartezeiten zu berechnen ist.

```
RelHVerteilung[zliste, zliste] // N
StabDiagramm[zliste, zliste]
```

```
{0.52381, 0.142857, 0.119048, 0.0714286,
 0.047619, 0.0238095, 0.0238095, 0.047619}
```



Das Paket **Zufallsversuche.m** enthält eine Funktion, welche diese manuell durchgeführten Operationen zusammenfasst und automatisiert:

```
WartezeitenListe[0.4, 100]
```

```
{2, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 4, 2, 2, 2, 3,
 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 5, 4, 1, 1, 3, 11, 1, 4, 2, 8, 2, 1, 2, 1, 3}
```