Aufbau des Roulettspiels

Die folgende kleine Studie zum Aufbau des Roulett-Spiels nutzt das begriffliche Instrumentarium der Abschnitte über Elementare Wetten und Multiwetten. Auch die Materialien zum Roulett (Satzmöglichkeiten und Gewinnchancen auf dem Tableau) sollten bekannt sein.

Unser Vorgehen ähnelt ein wenig einer "Neu-Erfindung" des Spiels. Am Anfang steht eine Liste mit plausiblen und zweckmäßigen Anforderungen, aus der dann schrittweise die konkreten Eigenschaften und Strukturen des Spiel deduziert werden.

■ Grundlegende Forderungen

Folgende (noch recht allgemein gehaltene) Eigenschaften werden für Roulett gefordert:

R1. Es handelt sich um ein reines Glücksspiel, d.h. Gewinn und Verlust werden zufällig und nicht aufgrund von Geschicklichkeit und intelligentem Verhalten realisiert. Die Versuchsvorrichtung (Kessel) ist dazu mit einer Anzahl gleichwahrscheinlicher Ausgänge versehen. Als Vorbild kann ein Bernoulli-Rad mit gleichgroßen Sektoren dienen.

R2. Die Ausgänge sind Zahlen: $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$. Die Zählung beginnt bei 0, weil dem damit verbundenen Ereignis *Zero* eine besondere Rolle zukommen soll. Die Zahl n werden wir später festlegen.

R3. a) Damit der Bankhalter ruhig schlafen kann, wird Erwartungsstabilität verlangt. b) Um die Bank in eine Vorteilsposition zu bringen, muss der Stabilitätskoeffizient negativ sein ($\lambda < 0$). c) Um die Spieler zu motivieren, muss die Gewinnerwartung maximal sein.

R4. Die Auszahlungsquoten auf alle wettbaren Ereignisse sind ganze Zahlen.

R5. Um den Spielern Abwechslung zu bieten, werden möglichst viele zusammengesetzte Ereignisse in das Wettgeschehen einbezogen.

R6. Bei der Realisierung des Geräts ist ein optimaler Kompromiss zu finden zwischen der physikalischen Kontrolle (der Gleichverteilung) einerseits und der Übersichtlichkeit für die Spielteilnehmer (Größe des Tableaus).

■ Stabilitätskoeffizient und Quote

Die Wahrscheinlichkeiten der Roulett-Zahlen k seien p_k $(k \in \Omega)$. Es gilt nach **R1** und **R2:** $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n+1}$. Wir notieren kürzer $p = p_k$.

Mit q_k bezeichnen wir die Auszahlungsquote für die Zahl k.

Wird die Forderung **R3** a) erfüllt, so liefert das Stabilitätskriterium: $q_k\ p_k = \lambda + 1$. Daraus ergibt sich sofort, dass alle Zahlen k dieselbe Quote $q\ (= q_k)$ erhalten. Wir lösen die Gleichung nach λ auf:

$$\lambda = q\ p - 1 = \frac{q}{n+1} - 1$$

Die in **R3** b) geforderte Bedingung $\lambda < 0$ ist daher genau dann erfüllt, wenn $q < n + 1$; dabei ist **R4** zufolge q als ganze Zahl zu wählen. Die Forderung **R3** c) nach größtmöglicher Gewinnerwartung (für den Spieler) macht diese Wahl eindeutig. Denn für eine stabile Wette gilt $E(G) = \lambda\, S$, d.h. wir müssen q so festlegen, dass λ maximal wird. Dies ist genau für $q = n$ der Fall. Insgesamt erhalten wir damit Werte für die Einzelquote und den Stabilitätskoeffizienten, die nur noch von der Tableaugröße n abhängen:

$$q = n \text{ und } \lambda = -\frac{1}{n+1}$$

■ Verbundquoten und Tableau

Um **R5** Genüge zu tun, werden zusammengesetzte Ereignisse $A \subset \Omega$ in das Wettgeschehen einbezogen. Nach **R4** muss auch deren Quote $q(A)$ ganz sein. Es ergibt sich nach dem *Satz über die Verbundquoten* bei stabilen Multiwetten:

$$\frac{1}{q(A)} = \underbrace{\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}}_{|A|-\text{mal}} = \frac{|A|}{q}$$

und damit:

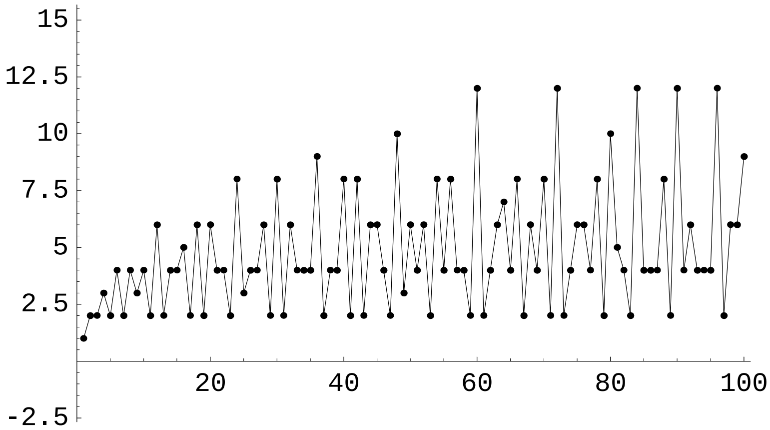
$$q(A) = \frac{q}{|A|} = \frac{n}{|A|}$$

Damit möglichst viele $A's$ definiert werden können, muss n zahlreiche Teiler besitzen. Bei $n = 29$ etwa erhielten wir nicht eine einzige zusammengesetzte Gewinnchance. Auf der anderen Seite verhindert die Forderung **R6** zu große Werte von n. Denn damit würde das Tableau zu unübersichtlich, aber auch die Fächer bzw. der zugehörige Sektorwinkel des Kessels zu klein für eine zuverlässige Laplace-Maschine. Aus Gründen der Praktikabilität wird man daher $n \le 100$ einschränken.

Glücklicherweise benötigen wir für eine größere Teilermenge von n nicht unbedingt auch große Zahlen. Ist n aus wenigen kleinen Primfaktoren aufgebaut, so hat sie viele Teiler. Wir verschaffen uns einen Funktionsverlauf der Teileranzahl von n für $1 \le n \le 100$:

```
<< Graphics`Graphics`
<< Modellbildung`Verteilungen`
```

```
ta = Table[Length[Divisors[n]], {n, 1, 100}];
LinienDiagramm[ta, 1]
```

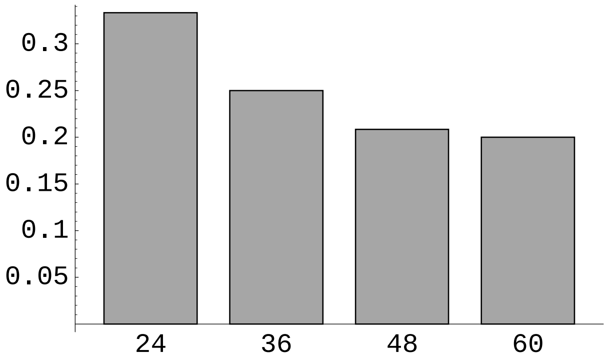


Die größte Teileranzahl, die in diesem Intervall vorkommt, ist 12 (für n = 60, 72, 84, 90, 96). Die nächstniedrigeren Anzahlen sind 10 (für n = 48, 80) und 9 (für n = 36, 100). Immerhin hat die kleine Zahl n = 24 bereits 8 Teiler.

Fazit:

Als brauchbare Werte für n bleiben: 24, 36, 48, 60.

Für welches n sollen wir uns entscheiden? – Natürlich ist das keine rein mathematische Frage mehr. Alle vier Werte kommen prinzipiell in Betracht. Es ließe sich allenfalls noch ihre "Ergiebigkeit" in Form des Quotienten $\frac{t(n)}{n}$ messen, wobei $t(n)$ = *Teileranzahl von n* bedeutet:



Bei diesem Test schneidet die 24 am besten ab! Tatsächlich gibt es auch ein dem Roulett verwandtes Spiel namens *Roulca*, das auf dieser Zahl aufbaut. Es wurde von dem Croupier Josef Schlosser während seiner Kriegsgefangenschaft in Frankreich erfunden und später im Kleinen Saal des Casinos Baden-Baden gespielt.

Bekanntlich baut das Roulett-Spiel auf dem "zweitbesten" Wert n = 36 auf. Zu jedem echten Teiler t von 36 erhalten wir aus unserer oben hergeleiteten Verbundquoten-Formel eine ganze Auszahlungsquote q und damit einen Typ von Gewinnchance:

Teiler t	**Quote q**	**Ereignisse ("Chancen")**
18	2	sog. Einfache Chancen (18 Zahlen)
12	3	Dutzend, Kolonne (12 Zahlen)
9	4	[*nicht realisiert*]
6	6	Einfache Transversale (6 Zahlen)
4	9	Carré (4 Zahlen)
3	12	Volle Transversale (3 Zahlen)
2	18	Cheval (2 Zahlen)
1	36	Plein (1 Zahl)

Bei den einfachen Chancen *Manque* (1-18) und *Passe* (19-36) sowie bei allen Chancen mit Quote $q \geq 4$ sind die Zahlenfelder verbunden. Eine Chance mit 9 Feldern wurde (vermutlich aufgrund der 3×12-Tableau-Geometrie nicht realisiert. Man beachte: Im Regelwerk des Roulett werden die Gewinnzahlungen durch die Nettoquoten $\hat{q} = q - 1$ angegeben. Für die "Bruttoquoten" bestätigt man die im Satz über die Verbundquote formulierte "Summenregel" (als Übungsaufgabe).

■ Gewinnerwartung

Der Stabilitätskoeffizient des Roulett-Spiels beträgt $\lambda = -\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$. Danach ist die Gewinnerwartung $-0.0027 \times \mathit{Einsatzsumme}$, d.h. unabhängig von der Art, wie die Spielchips auf dem Tableau verteilt werden, haben die Spieler im Mittel mit einem Verlust von 2.7 % ihrer Einsätze zu rechnen. Ein irgendwie geartetes "Spielsystem", das sichere Gewinne garantiert, ist damit ausgeschlossen.

Die berechnete Gewinnerwartung gilt allerdings nur für die nicht-einfachen Chancen. Der Grund dafür liegt darin, dass bei Ausgang 0 (*Zero*) die Einfachen Chancen (Rot, Schwarz, usw.) mit etwas mehr Milde behandelt werden. Die Einsätze auf ihnen gehen nicht direkt verloren, und der Spieler erhält zwei Wahlmöglichkeiten (was die Sache rechnerisch etwas komplizierter macht): 1. Sein Einsatz geht zur Hälfte verloren, oder 2. er wird gesperrt (*en prison*). Kommt beim nächsten Spiel wieder Zero, erhält die Bank den Einsatz, andernfalls wird er wieder freigegeben (vorausgesetzt die Einfache Chance, auf der er liegt, gewinnt). Das klassische französische Roulett sieht bei wiederholtem Zero sogar eine zweite Sperrung vor, die durch zwei Freigaben wieder aufgehoben werden muss.

Es soll hier darauf verzichtet werden, aus diesem Reglement und seinen Varianten die jeweiligen exakten Stabilitätskoeffizienten für das Einfach-Chancen-Spiel zu berechnen. Vgl. dazu [P. Davies, A.S.C. Ross: *Repeated zero at roulette*. The Mathematical Gazette **63**, No. 423 (1979), 54-56]. – Gehen wir von der vereinfachten Annahme aus, wonach bei Zero die Bank die Hälfte des Einsatzes auf Einfachen Chancen einzieht, so ergibt sich: $\lambda = -\frac{1}{74} \approx -0.0135$ (zur Übung). Dieser Wert ist als realistische Näherung an die Realität zu betrachten.

Wetten auf Einfache Chancen haben (nicht zuletzt angesichts der gemäßigt negativen Gewinnerwartung) ihren Reiz. Wer 1000 € auf Rot setzt, gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 48.6 % weitere 1000 € dazu. Verglichen mit den Gewinn-Wahrscheinlichkeiten beim Lotto und anderen Totalisator-Spielen ist dies ein außerordentlich hoher Wert. Z.B. gewinnt man "4 Richtige" beim Lotto (6 aus 49) mit weniger als 1 Promille! Beim Roulett sind natürlich größere Einsätze erforderlich und entsprechend gute Nerven, um die Alles-oder-Nichts-Situation auszuhalten. Bei längerem Wetten mit kleineren Einsätzen beeinträchtigt ein Spieler die Chance, von einer Laune des Zufalls zu profitieren, da dann die größere Anzahl der Spieldurchgänge zum statistischen Ausgleich und damit zu einer besseren Approximation an die theoretische Gewinnerwartung führt – und die ist bekanntlich negativ!