Elementare Wetten

Grundlegende Unterscheidungen

Unter einer **Wette** W (i.w.S.) verstehen wir einen Vertrag, in dem zwei Parteien (im Folgenden **Spieler** und **Bank** genannt) Leistungen vereinbaren, die von beiden Parteien zu erbingen sind, wenn bestimmte Ereignisse eintreten, die zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses unsicher sind. Bei der "Bank" kann es sich um einen persönlichen Gegenspieler handeln oder um eine Organisation, die Wetten mit einer größeren Zahl von Spielern abschließt. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich Wetten, deren Leistungen in der *Zahlung von Geldbeträgen* besteht.

Wir unterscheiden zwischen Wetten unterschiedlicher Struktur:

- **Elementare Wetten** (die auf ein einzelnes Ereignis A abgeschlossen werden)
- **Multiwetten** (die sich auf mehrere Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zugleich beziehen)

Die Rollen von Spieler und Bank sind in vertraglicher Hinsicht nicht immer symmetrisch. So kommt es in der Praxis vor, dass der Spieler sich zu einer Leistung (Geldzahlung) bereit findet, die Bank jedoch keine bestimmte (sondern nur eine *variable*) Auszahlung zusichert. Dies ist z.B. notwendig der Fall, wenn die Auszahlungsleistung nach dem Prinzip des Totalisators festgelegt wird (vgl. Näheres dazu im Abschnitt über Multiwetten). Die meisten Lotterien, das Zahlenlotto und (selbstredend) Fußball- und Pferde-Toto gehören zu diesem Typ.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit elementaren Wetten.

Bei einer elementaren Wette W (im Folgenden kurz: Wette) ist es (außer beim Totalisator, s.o.) der Normalfall, dass beide Parteien ihre Leistungen exakt im Voraus festlegen.

Einsatz und Gewinn

Der Spieler zahlt an die Bank einen positiven Betrag e (den **Einsatz** der Wette). Wenn das Ereignis A eintritt (d.h. der Spieler die Wette *gewinnt*), zahlt die Bank an ihn einen zuvor vereinbarten positiven Betrag b (den **Bruttogewinn**).

Bei einer sinnvollen Wette übersteigt der Bruttogewinn den Einsatz: $b > e$, sonst bliebe dem Spieler, der die Wette gewinnt, nach Abzug seines Einsatzes kein positiver **Reingewinn** $g = b - e$. Wir nennen g kürzer **Gewinn** und fassen ihn (in Anbetracht der Unsicherheit des Ereignisses, auf das gewettet wird) als *Wert einer Zufallsvariablen* G auf.

Auszahlungsquote, Verhältnis, Wettquotient

Das Verhältnis von Bruttogewinn zu Einsatz heißt **Auszahlungsquote** q (kurz: **Quote**) von W:

$$q = \frac{b}{e}$$

Für den Gewinn gilt: $g = q\,e - e = (q-1)\,e$. Somit gibt der Wert $q-1$ das Verhältnis von Gewinn zu Einsatz wieder; wir nennen ihn **Nettoquote** und bezeichnen ihn mit $\hat{q}$.

Gelegentlich wird die Quote einer Wette durch ein ganzzahliges **Verhältnis** indirekt angegeben. Lässt sich ein Spieler z.B. auf eine Wette im Verhältnis $2:1$ ein, so ist er bereit, 2 Geldeinheiten einzusetzen, während die Bank (als Gegenspieler) 1 Geldeinheit einsetzt. Den Stock von 3 Geldeinheiten erhält der Gewinner. Somit entspricht dem Verhältnis $2:1$ die Quote $q = \frac{3}{2}$.

Ein Spieler, der eine Wette im Verhältnis $2:1$ abschließt, wird dies vernünftigerweise nur tun, wenn das "Treffer"-Ereignis A für ihn doppelt so wahrscheinlich ist wie das Gegenereignis $\overline{A}$. Entsprechendes gilt natürlich auch für den Gegenspieler im umgekehrten Verhältnis. Beide Parteien drücken mit dieser Wette die (epistemisch zu deutenden) gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$ aus. (In Wirklichkeit gehen viele, wenn nicht die meisten Spieler auf Wetten ein, die einer Wahrscheinlichkeitsbeurteilung keineswegs standhalten. Solches nicht-rationale Verhalten wurzelt oft darin, dass man in einer Risikosituation den "großen Gewinn" oder auch nur spannende Unterhaltung sucht.)

Der Sachverhalt soll allgemein beschrieben werden. Unter einer **Wette** (**im Verhältnis**) $s:t$ verstehen wir eine Wette mit der Quote $q = \frac{s+t}{s}$; der Kehrwert dieser Quote heißt **Wettquotient** w:

$$w = \frac{s}{s+t} = \frac{1}{q}$$

Unter bestimmten Bedingungen, die rationales Verhalten definieren, bringen Wettquotienten die epistemischen Wahrscheinlichkeiten der Beteiligten Spieler zum Ausdruck.

Wir treffen folgende Vereinbarung:

Fehlt bei einer Wette eine Angabe zu Verhältnis, Wettquotient oder Quote, so gehen wir stillschweigend von dem Verhältnis $1:1$ aus (**Standard-Wette**). Die Quote einer Standard-Wette beträgt somit 2.

Gewinnerwartung

Ist eine objektive Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ bekannt (z.B. aufgrund physikalischer Symmetrien), so ist der Erwartungswert $E(G)$ des Gewinns (kurz: **Gewinnerwartung**) definiert, und es gilt:

$$E(G) = p\,g + (1-p)\,(-e)$$

Wir verwenden $g = (q-1)\,e$ und erhalten:

$$E(G) = (p\,q - 1)\,e$$

Üblicherweise heißt die Wette **fair** (oder **gerecht**), wenn $E(G) = 0$, (für den Spieler) **günstig**, falls $E(G) > 0$, sonst **ungünstig**.

Legt man die frequentistische Deutung der Wahrscheinlichkeit zugrunde, so schätzt die Gewinnerwartung den mittleren Reingewinn, den der Spieler bei wiederholten Durchführungen der Wette erzielt. Bei einer fairen Wette kommt es auf längere Sicht zu einem angenäherten Ausgleich zwischen Spieler und Gegenspieler (bzw. Bank).

Man sieht ohne weiteres ein:

1. $E(G) = 0 \Longleftrightarrow p = w$
2. $E(G) > 0 \Longleftrightarrow p > w$
3. $E(G) < 0 \Longleftrightarrow p < w$

Danach ist eine Standard-Wette genau dann fair (günstig, ungünstig), wenn $p = \frac{1}{2} \left(> \frac{1}{2}, \ < \frac{1}{2} \right)$ gilt.

Wetten auf das Gegenereignis

Wir bezeichnen mit A' das Gegenereignis zu A und entsprechend mit $p' = 1 - p$. Einigen sich Spieler und Gegenspieler auf eine Wette mit dem Verhältnis $s : t$, so lautet die zu A gehörige Quote $q = \frac{s+t}{s}$ und die zu A' gehörige Quote $q' = \frac{s+t}{t}$. Offenbar gilt

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$$

Zwischen den Gewinnerwartungen $E(G)$, $E(G')$ von Spieler bzw. Gegenspieler besteht folgende Beziehung:

$$E(G') = -E(G)$$

<u>Beweis:</u> Wettet der Spieler den Einsatz e auf A, so ist sein Reingewinn $(q - 1)\, e$ gerade der Einsatz e' des Gegenspielers. Dies ergibt sich auch rechnerisch sofort aus der Proportion $e : e' = s : t$; es gilt ja $e' = \frac{t}{s}\, e$ und $q - 1 = \frac{t}{s}$. Wegen $q' = \frac{q}{q-1}$ erhalten wir damit für das Verhältnis der Gewinnerwartungen:

$$\frac{E(G')}{E(G)} = \frac{(p'\, q' - 1)\, e'}{(p\, q - 1)\, e} = \frac{\left((1-p) \cdot \frac{q}{q-1} - 1\right)(q-1)}{p\, q - 1} = \frac{(1-p)\, q - (q-1)}{p\, q - 1} = -1 \quad \blacksquare$$