Gewinnsichere Einsatzverteilungen

Das Problem

■ Vorbemerkungen

Das einführende Beispiel "Eine doppelte Buchmacherwette" enthält die Aufgabe, zu einer vollständigen Multiwette mit zwei Ausgängen A_1, A_2 Einsätze e_1, e_2 zu bestimmen, die dem Spieler einen positiven Reingewinn unabhängig vom Wettausgang garantieren.

Die Möglichkeit einer solchen gewinnsicheren Einsatzverteilung hängt allein von den Auszahlungsquoten ab; die Wahrscheinlichkeiten der Ausgänge A_k spielen in diesem Zusammenhang keine Rolle.

Wir wollen das Problem in allgemeiner Form formulieren und lösen.

■ Formulierung des Problems

Wir setzen eine vollständige Multiwette mit sich gegenseitig ausschließenden Ausgängen $A_1, \ldots, A_n$ und zugehörigen Quoten $q_1, \ldots, q_n$ (sämtlich > 1) voraus. Der Einsatz eines Spielers auf A_k werde mit e_k bezeichnet, die Summe aller Einsätze mit $S = e_1 + \ldots + e_n$. Der Gewinn (Reingewinn), der bei Eintritt von A_k erzielt wird, lässt sich dann darstellen als

$$g_k = g_k(e_1, \ldots, e_n) = q_k\, e_k - S, \text{ wobei } 1 \le k \le n$$

Eine Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ mit nichtnegativen e_k heiße **gewinnsicher**, wenn $g_k(e_1, \ldots, e_n) > 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$.

Aus der Definition ergibt sich sofort $e_k > 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$. (Bei einer gewinnsicheren Einsatzverteilung entsteht unter allen Umständen ein positiver Gewinn, es muss also auf sämtlichen Ausgängen ein positiver Einsatz gewettet werden.)

Wir stellen folgende Fragen:

1. Unter welcher (hinreichenden und/oder notwendigen) Bedingung für die Quoten gibt es gewinnsichere Einsatzverteilungen?

2. Wie lassen sich im Falle ihrer Existenz die Einsatzbeträge gewinnsicherer Verteilungen effektiv berechnen?

Defekt einer Wette

Der folgende Gedankengang hat heuristischen Charakter; er motiviert u.a. den Begriff *Defekt einer Wette*, der eine Schlüsselrolle bei der Lösung unseres Problems spielt.

Da auf alle A_k ein positiver Betrag gesetzt wird, liegt es nahe, die Multiwette auf jeweils $A_1, \ldots, A_n$ als elementare Wette auf das Ereignis $A\,(= A_1 + \ldots + A_n)$ zu deuten. Dabei ist S der Einsatz auf A.

Wir müssen nun noch die Verbundquote q für A festlegen.

Das Kohärenzprinzip (wonach sich die Gewinnerwartung durch die hier vorgenommene Bündelung der Wettausgänge nicht ändern soll) liefert im allgemeinen keine Quote, die von den Einsätzen $e_1, \ldots, e_n$ unabhängig ist. Wir wollen daher (vorübergehend) annehmen, dass bei jedem Wettausgang ein konstanter Reingewinn g entsteht: $g_1 =. .. = g_n = g$. In diesem Fall erhalten wir offenbar eine stabile Wette (es ist $E(G) = p_1\, g + \ldots + p_n\, g = g$).

Nach dem *Satz über die Verbundquote* (vgl. den Abschnitt "Multiwetten") gilt in diesem Fall für die (nach dem Kohärenzprinzip ermittelten) Quote q und den zugehörigen Wettquotienten w:

$$w = \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n}$$

Ist der Wettquotient $w \leq 1$, lässt er sich als subjektive Wahrscheinlichkeit deuten, die der Spieler dem Ereignis A zuschreibt. Da A objektiv sicher ist, erscheint allein $w = 1$ als vernünftig. Nichtsdestoweniger sind in der Praxis für w Werte < 1 und > 1 möglich. (So ließe sich etwa im Beispiel "Doppelte Buchmacherwette" der Wert $w = \frac{10}{23} + \frac{5}{9} = \frac{205}{207} < 1$ dadurch erklären, dass die erste Quote von einem Buchmacher festgelegt wird, der nichts von dem zweiten Buchmacher und seiner Quote für das Gegenereignis weiß – und umgekehrt.)

■ Definition

Die Differenz $v := 1 - w$ bzw. ausführlicher

$$v := 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}$$

heiße **Defekt** der Multiwette mit den Auszahlungsquoten $q_1, \ldots, q_n$.

Das Hauptresultat

■ Vorbereitung

Wir wollen – zur Vorbereitung des Hauptresultats – die heuristische Überlegung des vorangehenden Abschnitts noch etwas ausbauen. Dabei gelte weiterhin die Annahme: $g_1 =. .. = g_n = g$.

Es ergibt sich: $e_k\, q_k = g + S = \text{const}$, oder als Verhältnisgleichung geschrieben:

(*) $\qquad e_1 : e_2 : \ldots : e_n = \frac{1}{q_1} : \frac{1}{q_2} : \ldots : \frac{1}{q_n}$

Daraus lassen sich nun Einsätze e_k bestimmen, die einen konstanten Gewinn g unabhängig vom Ausgang der Wette garantieren.

Da das Ereignis A in jedem Fall eintritt, ergibt sich der sichere Reingewinn $g = q\,S - S = (q-1)\,S$. Wir stellen damit die Einsatzsumme S wie folgt dar:

(**) $\qquad S = \frac{g}{q-1} = \frac{g}{q\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \frac{g}{q \cdot v}$

Tatsächlich lässt sich aus (*) und (**) folgern:

$$e_k = \frac{g}{q_k\, v} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n$$

<u>Beweis:</u> Man beachte, dass $e_1 + \ldots + e_n = S$ und $\frac{g}{q_1\, v} + \ldots + \frac{g}{q_n\, v} = \frac{g}{q\, v}$ gilt. Der Rest ergibt sich dann aus der folgenden **Hilfsbehauptung**:

> Es sei $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n \neq 0$ und $x_1 : \ldots : x_n = y_1 : \ldots : y_n$. Dann gilt $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

<u>Beweis der Hilfsbehauptung:</u> Es gibt eine reelle Zahl α, sodass $x_k = \alpha\, y_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Damit folgt $\sum_{k=1}^{n} x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} y_k$ und $\alpha = 1$. ■

■ Satz über gewinnsichere Einsatzverteilungen

> Folgende Aussagen sind äquivalent:
>
> (1) Zu jedem $g > 0$ existiert genau eine Einsatzverteilung mit $g_1 =. .. = g_n = g$.
>
> (2) Es gibt eine Einsatzverteilung mit $g_1 > 0, \ldots, g_n > 0$.
>
> (3) Für den Defekt v gilt: $v > 0$.
>
> (4) Für alle Einsatzverteilungen gilt: $g_1 + \ldots + g_n > 0$.

<u>Beweis:</u> Zunächst beweisen wir die Äquivalenz von (1)-(3) durch Ringschluss; anschließend wird $(3) \Leftrightarrow (4)$ gezeigt.

(1) ⇒ (2): Eine nach (1) existierende Einsatzverteilung erfüllt natürlich auch Bedingung (2).

(2) ⇒ (3): Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Einsatzverteilung, die der Bedingung (2) genügt, d.h. es gilt $q_k\, e_k - S = g_k > 0$ mit $1 \le k \le n$. Wir erhalten daraus $\frac{1}{q_k} < \frac{e_k}{S}$ und weiter $\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} < \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{S} = 1$. Somit gilt für den Defekt: $v > 0$.

(3) ⇒ (1): Sei $g > 0$ vorgegeben und $v > 0$ (wie in (3) vorausgesetzt). Wir definieren eine Einsatzverteilung durch $e_k := \frac{g}{q_k\, v}$ und zeigen $g_k = g$ für $k = 1, 2, ..., n$:

$$g_k(e_1, ..., e_n) = q_k\, e_k - S = \frac{g}{v} - \sum_{k=1}^n e_k = \frac{g}{v} - \sum_{k=1}^n \frac{g}{q_k\, v} = \frac{g}{v}\left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k}\right) = g$$

Tatsächlich sind die so definierten e_k $(1 \le k \le n)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems $q_k\, e_k - (e_1 + ... + e_n) = g$. Man zeigt dazu, dass die zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & \hat{q}_2 & ... & -1 \\ ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & \hat{q}_n \end{pmatrix}$$

mit $\hat{q}_k = q_k - 1$ (Nettoquoten) ist regulär ist (d.h. den Rang n besitzt).

(3) ⇔ (4): Für eine beliebige Einsatzverteilung $(e_1, ..., e_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} v > 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} < 1 = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^n e_k \\ &\Leftrightarrow 0 < \sum_{k=1}^n \left(\frac{e_k}{S} - \frac{1}{q_k}\right) \\ &\Leftrightarrow 0 < \sum_{k=1}^n (q_k\, e_k - S) = \sum_{k=1}^n g_k \end{aligned}$$

■

■ Folgerungen

Der vorangehende Satz charakterisiert Wetten W, bei denen gewinnsichere Einsatzverteilungen möglich sind. Das hinreichende und notwendige Kriterium dafür lautet, dass der Defekt v von W positiv ist: $v = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} > 0$. Dem Beweis entnimmt man, wie Einsätze $e_1, ..., e_n$ effektiv zu berechnen sind, für die sich ein vorgegebener konstanter Reingewinn $g\ (>0)$ ergibt. Es gilt: $e_k = \frac{g}{q_k\, v}$ für $k = 1, 2, ..., n$.

Beispiel: Eine vollständige Multiwette habe die Quoten $q_1 = 2$, $q_2 = 3.5$, $q_3 = 5$. Wegen $v = 0.0142857 > 0$ lassen sich gewinnsichere Einsätze finden, z.B. garantieren $e_1 = 3500$, $e_2 = 2000$, $e_3 = 1400$ einen sicheren Gewinn von 100 Geldeinheiten unabhängig vom Wettausgang.

Wenn die Einsatzsumme S vorgegeben wird (um damit die Ausgaben für die Wette zu beschränken), so ergibt sich für den dann erzielbaren konstanten Gewinn g:

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{g}{q_k\, v} = \frac{g}{v}(1 - v)$$

also: $g = \frac{v}{1-v} S$. Die zugehörigen Einsätze lauten damit:

$$e_k = \frac{S}{1-v} \cdot \frac{1}{q_k} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n$$

Liegt bei einer Wette W eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, \ldots, p_n)$ vor, so lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen Gewinnerwartung und Defekt von W erkennen:

Ist W bei allen Einsatzverteilungen günstig (fair, ungünstig), so ist der Defekt von W positiv (Null, negativ).

Beweis: Wir behandeln den Fall, dass W günstig bei allen Einsatzverteilungen $(e_1, \ldots, e_n)$ ist, d.h. es gilt: $E(G) = \sum_{k=1}^n (q_k\ p_k - 1)\, e_k > 0$, und damit auch $q_k\ p_k - 1 > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Wir erhalten hieraus $\frac{1}{q_k} < p_k$ und schließlich $v = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} > 1 - \sum_{k=1}^n p_k = 0$. – Analog verlaufen die übrigen Fälle. ■

Defekt und Stabilitätskoeffizient

Bei stabilen Wetten lässt sich der Zusammenhang zwischen Gewinnerwartung und Defekt v durch den Stabilitätskoeffizienten λ ausdrücken:

$$\lambda = \frac{v}{1-v}$$

Beweis: Für eine stabile Wette gilt: $q_k\ p_k = \lambda + 1$, mithin erhalten wir $\frac{1}{q_k} = \frac{p_k}{\lambda+1}$ und

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = \frac{1}{\lambda+1} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{\lambda+1}$$

Hieraus ergibt sich $v = 1 - \frac{1}{\lambda+1}$ sowie $\lambda = \frac{v}{1-v}$. ■

Folgerung für Totalisator-Spiele:

Wegen $\lambda = \theta - 1$ wird hier $v = 1 - \frac{1}{\theta}$. Es ist ferner $\theta = 1$ genau dann, wenn $v = 0$.

Geometrische Deutung

Dieser Paragraph wird zu einem späteren Zeitpunkt nachgeliefert.