Multiwetten

Begriffliche Unterscheidungen

Im allgemeinsten Sinn ist eine **Multiwette** W eine Wette, die sich auf mehrere (unter Umständen auch abzählbar-unendlich viele) Ereignisse $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ bezieht. Je nach der Art der Leistung, zu der sich der Spieler vorab verpflichtet, lassen sich zwei Typen unterscheiden.

■ Wetten vom Pauschaltyp

Wie bei einer elementaren Wette zahlt der Spieler an die Bank einen einzigen Einsatzbetrag. Die Gewinn-Situation ist nun aber nicht an ein Ereignis allein gebunden. Vielmehr können verschiedene Versuchsausgänge zu variierenden positiven Auszahlungen an den Spieler führen. Ein bekanntes Beispiel ist das *Zahlenlotto*, bei dem gemäß der erzielten Gewinnklasse ausgezahlt wird. Beim *St. Petersburger Spiel* haben wir es sogar mit unendlich vielen Gewinnklassen zu tun (vgl. den betreffenden Abschnitt).

■ Wetten vom Individualtyp

In diesem Fall realisiert der Spieler eine Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ auf das – als endlich vorausgesetzte – Ereignissystem $(A_1, \ldots, A_n)$, d.h. er setzt den Betrag e_i auf das Ereignis A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Eine Multiwette dieses Typs kann durch Zusammenfassung (Kopplung) mehrerer Einzelwetten $W_1, \ldots, W_n$ zustande kommen, wobei die Gegenspieler jeweils andere sein können. Es ist aber auch möglich, dass ein und dieselbe Bank als Partner bei allen Teilwetten auftritt. In diesem Fall bilden die $A_1, \ldots, A_n$ häufig die (sich wechselseitig ausschließenden) Ausgänge eines Zufallsversuchs, z.B. beim Roulett (vgl. dazu den Abschnitt über Roulett).

<u>Anmerkung:</u> Formal kann man Wetten vom Pauschaltyp dem Individualtyp unterordnen, indem man eine konstante Einsatzverteilung annimmt und deren Summe als Einzeleinsatz betrachtet.

■ Vollständigkeit

Von besonderem Interesse sind **vollständige** Multiwetten, bei denen mit Sicherheit wenigstens eines der Ereignisse A_i eintritt, der Spieler also mindestens eine Teilwette gewinnt.

Das Prinzip des Totalisators

Der Totalisator ist ein verbreitetes Prinzip zur Festlegung von Quoten. Diese erfolgt nachträglich seitens der Bank, die zunächst die Einsätze aller Spielteilnehmer bis zu einem Stichzeitpunkt sammelt. Danach werden die Quoten festgelegt und die Gewinne ausgeschüttet. Der insgesamt an die Spieler zurückfließende Betrag ist allerdings nur ein Teil der Einsatzsumme, der nach Abzug von Steuern, Betriebskosten und dgl. mehr übrig bleibt. Beim Zahlenlotto z.B. vermindert der Totalisator die Einnahmen um mindestens 50 %.

Ein Glücksspiel nach dem Totalisatorprinzip lässt sich als Multiwette eines Spielerkollektivs gegen die Bank auffassen. Die Besonderheit: Das Spielerkollektiv *verliert immer* (zumeist sehr hoch), während einzelne (zumeist sehr wenige) Spieler Gewinne in bisweilen beträchtlicher Höhe erzielen können. Dem Reiz großer, wenn auch unwahrscheinlicher Gewinne verdanken Totalisator-Spiele ihre hartnäckige Popularität. Ohne sie geht es auch nicht, da "Mega-Gewinne" ein entsprechend großes Spielerkollektiv voraussetzen.

Wir wollen das Totalisatorprinzip formal beschreiben: Bezeichnet e_k den auf das Ereignis A_k eingesetzen Gesamtbetrag (d.h. den Einsatz des Spielerkollektivs), so ist

$$S = e_1 + e_2 + ... + e_n$$

die totale **Einsatzsumme** (= Einnahme der Bank). Für den auszuschüttenden Betrag schreiben wir $\theta \cdot S$, wobei θ den **Ausschüttungsanteil** mit $0 < \theta \leq 1$ angibt. Im Fall $\theta = 1$ würde die Bank ihre Einnahmen vollständig wieder ausschütten. Die komplette Einbehaltung der Einnahmen ($\theta = 0$) bleibt außer Betracht, da sie den Charakter der Wette aufhöbe.

Wie sollen nun die Quoten q_k zu A_k festgesetzt werden? Ein naheliegendes und einfaches Verfahren ist folgende antiproportionale Definition:

$$q_k = \frac{\theta S}{e_k} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Diese besagt: Ereignisse A_k, auf die insgesamt große Einsätze gewettet wurden (weil die daran beteiligten Spieler an deren Eintreten glauben), erhalten umso niedrigere Auszahlungsquoten.

Beispiel: Auf Außenseiter beim Pferderennen zu setzen, ist nicht besonders erfolgversprechend (weshalb auch nur eine Minderheit dies wagt). Umso höher fällt die Auszahlungsquote aus, wenn dann wider Erwarten solche Wetten gewinnen.

Anmerkung: Es ist möglich und praktibel, die Quoten nach einer anderen Vorschrift als der hier formulierten zu berechnen. Dabei ist aber stets eine Reziprozität von Einsatzhöhe und Quote zu beachten. – Für das Folgende verzichten wir auf die Betrachtung solcher Varianten.

Aufgrund der antiproportionalen Festlegung der Quoten q_k lässt sich sofort eine Aussage über die zugehörigen Wettquotienten w_k gewinnen:

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = \frac{1}{\theta}$$

Beweis: Unter Berücksichtigung der Definition der w_k ($= \frac{1}{q_k}$) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\theta S} = \frac{1}{\theta S} \sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{1}{\theta}$$

■

Wettquotienten sind dazu geeignet, Glaubensgrade (epistemische Wahrscheinlichkeiten) auszudrücken (vgl. den Abschnitt über Elementare Wetten). Bei einem Totalisator-Spiel ist dies nach obiger Gleichung aber nur für $\theta = 1$ möglich, da andernfalls die $w_1, \ldots, w_n$ keine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Ereignismenge $\{A_1, .., A_n\}$ darstellen. Im Sinne der Wahrscheinlichkeitslehre ist daher die Teilnahme an einem Totalisator-Spiel mit $\theta < 1$ nicht rational!

Gewinnerwartung bei Multiwetten

Es soll der Erwartungswert $E(G)$ des Gewinns G berechnet werden, den ein Spieler bei einer vollständigen Multiwette vom Individualtyp mit gegebener W-Verteilung erzielt. Wir nehmen dazu für $k = 1, 2, \ldots, n$ an:

- Der Spieler setzt den Einsatz $e_k \geq 0$ auf das Ergebnis A_k (wobei $S = e_1 + e_2 + \ldots + e_n > 0$).
- Die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(A_k)$ sind bekannt (wobei $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$).
- Die Auszahlungsquoten q_k sind bekannt.

Man kann sich die Situation als $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Bernoulli-Rad vorstellen, auf dessen Sektoren 1, 2, ..., n beziehentlich die Einsätze $e_1, e_2, \ldots, e_n$ gewettet werden. Die Einsatzsumme S streicht die Bank ein. Gewinnt Sektor k, erhält der Spieler den Betrag $q_k e_k$ ausbezahlt.

Der Reingewinn g_k im Fall des Spielausgangs A_k ergibt sich damit zu $g_k = q_k e_k - S$. Die Zufallsvariable G kann die Werte $g_1, g_2, \ldots, g_k$ annehmen. Über ihren Erwartungswert lässt sich zeigen:

■ Satz über die Gewinnerwartung

$$E(G) = \sum_{k=1}^{n} (q_k\, p_k - 1)\, e_k$$

Beweis: 1. Die Gleichung ergibt sich durch direktes Auswerten der Summe $E(G) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, p_k$ unter Berücksichtigung der oben verabredeten Annahmen und Bezeichnungen (Einzelheiten als Übung).

2. Ein anderer Beweis nutzt die Additivität des Erwartungswertes aus. Wir denken uns die Multiwette in n elementare Teilwetten $W_1, \ldots, W_n$ zerlegt. Bei W_k setzt der Spieler den Betrag e_k auf A_k und den Betrag 0 auf alle übrigen A_j mit $j \neq k$. Dann erhält man $q_k e_k - e_k = (q_k - 1)\, e_k$ als Wert der Zufallsvariablen G_k, die den Gewinn der Wette W_k darstellt. Da bekanntlich $E(G_k) = (q_k\, p_k - 1)\, e_k$ (vgl. den Abschnitt über Elementare Wetten), ergibt sich: $E(G) = E(G_1 + \ldots + G_n) = E(G_1) + \ldots + E(G_n)$. ■

■ Gewinnerwartung bei Totalisator-Spielen

Wir werten den k-ten Summanden in der Formel für $E(G)$ mit der Totalisator-Quote $q_k = \frac{\theta S}{e_k}$ aus und erhalten: $(q_k\, p_k - 1)\, e_k = \left(\frac{\theta S}{e_k}\, p_k - 1\right) e_k = \theta\, S\, p_k - e_k$. Damit ergibt sich

$$E(G) = \sum_{k=1}^{n} (\theta\, S\, p_k - e_k) = \theta\, S \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} e_k = \theta\, S - S$$

und schließlich die Formel:

$$E(G) = (\theta - 1)\, S$$

Wegen $\theta \leq 1$ und $S > 0$ ist $E(G) \leq 0$, d.h. ein Totalisator-Spiel ist niemals günstig. Im Normalfall $\theta < 1$ ist es wegen $E(G) < 0$ sogar ungünstig. Der mittlere Gewinn, auf den ein Teilnehmer (hier: das Spielerkollektiv) auf längere Sicht hoffen darf, ist proportional zur Summe aller eingesetzten Beträge. Der Proportionalitätsfaktor $\theta - 1$ gibt den negativen Anteil an, den die einbehaltenen Einnahmen an dieser Summe ausmachen. Die Proportionalität zu S bringt zum Ausdruck, dass von allen Einsätzen e_k derselbe Anteil einbehalten wird.

Der große französische Schriftsteller und Philosoph Voltaire soll es verstanden haben, aus allen Gelegenheiten Geld zu schlagen. Den Grund zu seinem beträchtlichen Reichtum hatte er mit einer Lotterie gelegt, die vom damaligen absolutistischen Staat veranstaltet wurde. Voltaire und der Mathematiker La Condamine fanden für deren Ausschüttungsanteil $\theta > 1$ heraus (!). Nachdem sie finanzkräftige Partner ins Boot geholt hatten, kauften sie fast die ganze Auflage der Lose auf. Der Finanzminister war zuerst zufrieden über den guten Absatz, musste am Ende aber den Fehler einräumen und (durch einen Gerichtsbeschluss gezwungen) die Gewinne zu Lasten der Staatskasse ausbezahlen.

■ Erwartungsstabilität

Ist $E(G)$ proportional zur Einsatzsumme S, so kann ein Spieler die Gewinnerwartung nicht beeinflussen, gleichgültig wie er die einzelnen Einsätze in der von ihm insgesamt gesetzten Summe S auf die Spielausgänge verteilt. Für Totalisator-Spiele geht dies unmittelbar aus der oben bewiesenen Formel hervor. Es gibt aber auch andere Multiwetten (z.B. Roulett), bei denen Gewinnerwartung und Einsatzsumme proportional sind.

Wir nehmen dies zum Anlass folgender Definition:

Eine Multiwette (bzw. das zugehörige "Glücksspiel") heiße **erwartungsstabil** (kurz: **stabil**), wenn $E(G) = \lambda \cdot S$ gilt mit einem festen $\lambda \in \mathbb{R}$, **Stabilitätskoeffizient** genannt.

Beispiele: Für Roulett gilt $\lambda = -\frac{1}{37}$ (vgl. den Abschnitt über Roulett). – Das Glücksspiel *Lustige Sieben* ist hingegen nicht stabil. Es lassen sich Einsatzverteilungen finden, deren Gewinnerwartung größer ist als die aller anderen Einsatzverteilungen (vgl. die Übungsaufgaben).

Stabile (vollständige) Multiwetten werden charakterisiert durch den folgenden Satz:

Stabilitätskriterium

Eine Multiwette ist stabil genau dann, wenn $q_k\, p_k = \text{const}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Beweis: 1. Sei $q_k\, p_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Wir setzen $\lambda := q_k\, p_k - 1$ und erhalten sofort $E(G) = \lambda\, S$. – 2. Sei nun umgekehrt $E(G) = \lambda\, S$. Dann gilt für alle Einsatzverteilungen $e_1, \ldots, e_n$ mit der Summe S:

$$\sum_{k=1}^{n} (q_k\, p_k - 1)\, e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda\, e_k$$

Spezialisiert man $e_1 = S$ und $e_k = 0$ für $k \neq 1$, so ergibt sich: $(q_1\, p_1 - 1)\, S = \lambda\, S$ und damit $q_1\, p_1 = \text{const}$ $(= \lambda + 1)$. Für $e_2 = S$ und $e_k = 0$ $(k \neq 2)$ folgt in derselben Weise: $q_2\, p_2 = \text{const}$, usf. bis $e_n = S$, $e_k = 0$ für $k \neq n$. ■

Es ist aufschlussreich, sich vor dem Hintergrund des Stabilitätskriteriums in die Rolle der Bank zu versetzen, die ein bestimmtes "Glücksspiel" veranstaltet. Natürlich möchte sie *von allen Versuchsausgängen gleichmäßig profitieren*, d.h. sie muss eine stabile Multiwette anbieten und dafür sorgen, dass zu gegebener Totalsumme S aller Einsätze ihre Gewinnerwartung $E(G)$ stets gleich bleibt. Nach dem Stabilitätskriterium wird dies garantiert, wenn nur die Quoten q_k proportional den Kehrwerten der Wahrscheinlichkeiten p_k sind.

Derselbe Sachverhalt lässt sich auch mit den früher betrachteten Wettquotienten ($w_k = \frac{1}{q_k}$) formulieren: Stabile Multiwetten sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre "objektiven" Wahrscheinlichkeiten p_k und die Wettquotienten w_k (durch die für die Versuchsausgänge A_k "subjektive" Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden) proportional sind. Genauer gilt (mit dem Stabilitätskoeffizienten λ):

$$p_k = (1 + \lambda)\, w_k \quad \text{für alle } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

Für Totalisator-Spiele gilt: $\lambda = \theta - 1$ und $w_k = \theta^{-1}\, p_k$.

Opportunistisches Spielverhalten

Das Folgende bezieht sich auf Multiwetten, deren Quoten nach dem Totalisatorprinzip ermittelt werden.

■ Zweistufige Dynamik

Es kann (wie beim *Pferderennen*) vorkommen, dass die Totalisation der Einsätze zweistufig erfolgt. Zum Zeitpunkt, der die beiden Stufen voneinander trennt, wird eine Art "Zwischenbilanz" gezogen, d.h. die bis dahin (in sog. Vorwetten) gesetzten Beträge $e_1,\ \ldots,\ e_n$ werden (nach dem Totalisatorprinzip) in Quoten umgerechnet: $q_k = \frac{\theta\, S}{e_k}$ ($k = 1,\ \ldots,\ n$), und öffentlich bekanntgegeben.

Die Spieler erfahren auf diese Weise, wie das Spielerkollektiv die Wette einschätzt. Ein einzelner Spieler hat nun eine ggfs. zweite Gelegenheit, Geldbeträge zu setzen. Er kann sich dem Trend anschließen, d.h. auf favorisierte Pferde bevorzugt wetten, oder ein höheres Risiko bei Außenseitern eingehen, um von einer höheren Auszahlungsquote zu profitieren. Auf dem Rennplatz gibt es dazu allerlei "impressionistischen" Hintergrund: Besichtigung von Pferd und Jockey in der Vorführrunde, Insider-Tipps aus der Gerüchteküche, usw.

Die neuen Einsätze, die sich während der zweiten Stufe ansammeln, seien mit ${e_1}^*,\ \ldots,\ {e_n}^*$ bezeichnet, entsprechend $S^* = {e_1}^* + \ldots + {e_n}^*$. Die finalen Quoten ${q_k}^*$ werden daraufhin nach dem Totalisatorprinzip errechnet, wobei für A_k die Summe aus beiden Stufen $e_k + {e_k}^*$ zu Grunde gelegt wird.

Wir wollen annehmen, dass sich das Spielerkollektiv *opportunistisch* verhält. Das einfachste derartige Verhaltensmodell wird durch die proportionale Beziehung ${e_k}^* \propto w_k$ dargestellt. Wir notieren sie in der Form

$${e_k}^* = \alpha \cdot \frac{1}{q_k}$$

für eine reelle Konstante $\alpha > 0$. – Es lässt sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die finalen Quoten mit den Quoten aus den Vorwetten übereinstimmen:

$${q_k}^* = q_k \quad \text{für alle } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

Beweis: Zunächst bestimmen wir den Wert von α. Es gilt

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} e_k^* = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\theta S} = \frac{\alpha}{\theta S} \sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{\alpha}{\theta}$$

Es ist also $\alpha = \theta S^*$. Damit erhalten wir

$$q_k^* = \frac{\theta (S + S^*)}{e_k + e_k^*} = \frac{\theta (S + S^*)}{\frac{\theta S}{q_k} + \frac{\alpha}{q_k}} = \frac{\theta (S + S^*)}{\theta S + \theta S^*} q_k = q_k$$

■

■ Konvergenz bei mehrstufiger Dynamik

Es soll noch eine andere Modellierung opportunistischen Spielverhaltens erwähnt werden. Sie ist bei beliebig wiederholbaren Spieldurchgängen realisierbar und beschreibt ein Spielerkollektiv, das seinen Einsatz auf dem Ausgang A_k proportional zum mittleren Gewinn wählt, der im bisherigen Spielverlauf auf A_k verwirklicht wurde. Die Teilnehmer müssen dabei weder die objektiven Wahrscheinlichkeiten p_k kennen noch die Auszahlungsquoten q_k, die der Totalisator auf jeder Stufe ermittelt.

Man kann zeigen: Im Laufe der Zeit entsteht eine Folge von Wettquotienten $w_k(1)$, $w_k(2)$, $w_k(3)$, …., die für $t \to \infty$ gegen $\theta^{-1}\, p_k$ (mit Wahrscheinlichkeit 1) strebt. [Vgl. A. Schreiber: *Zur Anpassungsdynamik subjektiver Wahrscheinlichkeiten*. Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft **21** (1980), 117-125]. Die hier angenommene Form des Opportunismus stabilisiert somit zumindest auf lange Sicht ein dynamisches Wettsystem. Für $\theta = 1$ sind die Wettquotienten $w_k(t)$ als subjektive (epistemische) Wahrscheinlichkeiten interpretierbar, die stochastisch gegen die objektiven Wahrscheinlichkeiten p_k konvergieren.

Eine Summenregel für Quoten

Bei vielen Glückspielen ist es üblich, aus den vorhandenen Elementarereignissen A_1, ..., A_n neue Ereignisse zusammenzusetzen. Z.B. werden im Roulett zwei benachbarte Zahlenfelder zu einer neuen "Chance" (als *Cheval* bezeichnet) verkoppelt.

Wir betrachten allgemein den analogen Fall, dass Versuchsausgänge A_1, A_2 zu einem wettbaren Ereignis A verbunden werden. Es stellt sich dann die Frage, wie die Quote q für A festzulegen ist, wenn die Quoten q_1, q_2 für A_1 bzw. A_2 gegeben sind. Eine naheliegende Vorgehensweise erschließt sich durch folgenden Grundsatz:

Kohärenzprinzip

Durch Ereignisbündelung soll sich die Gewinnerwartung nicht ändern.

Das hat unmittelbar zur Folge: Der Summand im Erwartungswert, der sich auf das zusammengesetzte Ereignis A bezieht, liefert denselben Beitrag wie die beiden Summanden, die zu den Ereignissen A_1 und A_2 gehören, zusammen.

Mit der oben hergeleiteten Formel für den Erwartungswert $E(G)$ ergibt sich:

$$(q_1\, p_1 - 1)\, e_1 + (q_2\, p_2 - 1)\, e_2 = (q\, (p_1 + p_2) - 1)\, (e_1 + e_2)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung (mit der unbekannten Quote q) beschreibt den Anteil von A an der Gewinnerwartung. Nach q aufgelöst erhalten wir:

$$q = \frac{q_1\, p_1\, e_1 + q_2\, p_2\, e_2}{(p_1 + p_2)\,(e_1 + e_2)}$$

Im allgemeinen liefert dieser Ausdruck keine von der Einsatzverteilung unabhängige Festsetzung der "Verbundquote" q. Anders bei stabilen Wetten. Für diese gilt nämlich nach dem oben bewiesenen Stabilitätskriterium: $q_1\, p_1 = q_2\, p_2 = \lambda + 1$ (λ Stabilitätskoeffizient), woraus mit $p = p_1 + p_2 = P(A)$ folgt:

$$q = \frac{(\lambda + 1)\,(e_1 + e_2)}{p(e_1 + e_2)} = \frac{\lambda + 1}{p}$$

Die Konstanz der Produkte aus Quote und Wahrscheinlichkeit gilt (bei stabilen Multiwetten) demnach auch für beliebige zusammengesetzte Ereignisse: $q\, p = \lambda + 1$.

Die Formel zur Berechnung der Verbundquote q aus den Einzelquoten q_1 und q_2 ergibt sich aus dem bisher Hergeleiteten ohne Mühe:

■ Satz über die Verbundquote bei stabilen Wetten

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

Beweis: $\frac{1}{q} = \frac{p}{\lambda+1} = \frac{p_1+p_2}{\lambda+1} = \frac{p_1}{\lambda+1} + \frac{p_2}{\lambda+1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ■

Anmerkung: Die Beziehung zwischen Verbundquote und Einzelquoten bei erwartungsstabilen Multiwetten ist formal identisch mit der aus der Elektrizitätslehre bekannten Beziehung zwischen Gesamtwiderstand und parallel geschalteten Einzelwiderständen.