
Nutzenerwartungswert und Bernoulli-Regel

Entscheidungen unter Risiko

Ein Entscheidungsproblem bei *Unsicherheit* wird mit Hilfe einer Regel gelöst, die ausschließlich die Werte der Nutzenmatrix verarbeitet (vgl. den Abschnitt "Entscheidungen bei Unsicherheit"). Dazu hatten wir eine Entscheidungsregel durch Angabe einer Wertfunktion w auf der Menge A der Alternativen definiert. Die Lösungsmenge $S_w(A)$ des Entscheidungsproblems besteht dann aus allen $a \in A$, für die $w(a)$ maximal ist (Optimalitätsprinzip).

Bei Entscheidungen unter *Risiko* gehen wir in derselben Weise vor. In diesem Fall ist zusätzlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge B der Bedingungen gegeben, d.h. es ist bekannt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_j = P(b_j)$ die Umweltbedingungen b_j eintreten ($j = 1, 2, \dots, n$), wobei gilt:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Der Nutzenerwartungswert. Bernoulli-Regel

■ Eine Wertfunktion, die Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt

Es liegt nahe, die zusätzliche Information über die Bedingungen in einer Wertfunktion zu verarbeiten. Im Falle von Unsicherheit (d.h. ohne Kenntnis von Wahrscheinlichkeiten) bot sich kein allgemein plausibles Verfahren an, aus den Nutzenwerten u_1, \dots, u_n einer Alternative a einen "Gesamtwert" zu ermitteln. Kennt man jedoch die Wahrscheinlichkeiten, mit der die b_j eintreten (und die Nutzenwerte u_j realisiert werden), so bietet sich die gewichtete Summe

$$EU(a) := p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n$$

als ein solcher Gesamtwert an. Es handelt sich um den Erwartungswert des Nutzens von a , auch **Nutzenerwartungswert** genannt; in der Bezeichnung EU ("Expected Utility") soll dies zum Ausdruck kommen.

Wählt man EU als Wertfunktion auf der Alternativenmenge, so erhalten wir damit ein einfaches Entscheidungsverfahren. Wir indizieren die Wertfunktion w mit dem Namen "Bernoulli" (auf den diese Anwendung des Erwartungswerts zurückgeht).

Die folgende Formulierung setzt voraus:

- eine Alternativenmenge: $A = \{a_1, \dots, a_m\}$
- eine Menge von Bedingungen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
- eine Nutzenmatrix $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}$
- eine W-Verteilung (p_1, \dots, p_n) auf B .

Damit lautet die Bernoulli'sche Wertfunktion:

$$w_{\text{Bernoulli}}(a_i) = \text{EU}(a_i) = p_1 u_{i1} + p_2 u_{i2} + \dots + p_n u_{in}$$

Beim praktischen Rechnen empfiehlt es sich, die Daten in eine Nutzen-Tabelle einzutragen. Der Wert $w_{\text{Bernoulli}}(a_i)$ ist dann ans Ende jeder Zeile $i = 1, 2, \dots, m$ zu notieren; anschließend sucht man die Zeilen mit maximalem Nutzenerwartungswert.

■ Beispiel 1

Wie schon im Fall von Entscheidungen bei Unsicherheit wollen wir das Verfahren an dem Beispiel "Der passende Wein" illustrieren.

Die Nutzenmatrix lautet: $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Die eingeladene Person schätze die Wahrscheinlichkeit für Rindfleisch mit 60 %, die von Fisch mit 10 %. Dann lautet die W-Verteilung: $p_1 = P(\text{Huhn}) = 0.3$, $p_2 = P(\text{Rindfleisch}) = 0.6$, $p_3 = P(\text{Fisch}) = 0.1$.

Damit können die drei Alternativen für die Wahl der Weinart bewertet werden:

$$\text{EU}(a_1) = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot (-1) + p_3 \cdot 1 = -0.2$$

$$\text{EU}(a_2) = p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot (-1) = 0.5$$

$$\text{EU}(a_3) = p_1 \cdot 0.5 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot (-1) = 0.05$$

Es ergibt sich folgende Präferenzordnung: $a_2 > a_3 > a_1$, d.h. der Gast entscheidet sich für Rotwein.

Bemerkung: Die Laplace-Regel (vgl. den Abschnitt "Entscheidungen bei Unsicherheit") hatte bei diesem Beispiel eine andere Präferenz ergeben. Der Grund ist in der dabei unterstellten Gleichverteilung $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ zu sehen.

Tatsächlich ist allgemein die Laplace-Wertfunktion w_{Laplace} *Spezialfall* der Bernoulli-Wertfunktion $w_{\text{Bernoulli}}$ für $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. Bei Gleichverteilung geht der Nutzenerwartungswert in das arithmetische Mittel der Nutzenwerte über.

■ Beispiel 2

Für das Beispiel "Auflagenhöhe für ein Buch" (vgl. diesen Abschnitt) hatten wir bereits mit einer W-Verteilung für die 6 Bedingungen gearbeitet:

$$p_1 = 0.1, p_2 = 0.15, p_3 = 0.15, p_4 = 0.3, p_5 = 0.2, p_6 = 0.1$$

Zu jeder der drei Alternativen wurde der Nutzenerwartungswert berechnet:

$$EU(a_1) = 13500$$

$$EU(a_2) = 13750$$

$$EU(a_3) = -250$$

Die maximal bewertete Alternative a_2 (Auflage von 7000 Exemplaren) ergibt sich somit als Lösung.

Verfolgt der Verleger neben dem Ziel "Gewinnmaximierung" zusätzlich das Ziel "Vermeidung von Nachfrageüberhang" (und zwar im Gewichtungungsverhältnis 2 : 1), so erhält man folgende (normierte) Nutzenmatrix (vgl. Übungen):

$$U = \begin{pmatrix} \frac{31}{45} & \frac{37}{45} & \frac{133}{180} & \frac{59}{90} & \frac{103}{180} & \frac{22}{45} \\ \frac{23}{45} & \frac{29}{45} & \frac{7}{9} & \frac{41}{45} & \frac{149}{180} & \frac{67}{90} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{15} & \frac{3}{5} & \frac{11}{15} & \frac{13}{15} & 1 \end{pmatrix};$$

Das *Mathematica*-Paket **Entscheidungsregeln.m** bietet neben den klassischen Regeln für Entscheidungen bei Unsicherheit auch eine automatisierte Berechnung der Lösungsmenge nach dem Bernoulli-Verfahren:

```
<< Modellbildung`Entscheidungsregeln`

pvert = {0.1, 0.15, 0.15, 0.3, 0.2, 0.1};
Bernoulli[U, pvert]

{2}
```

Die Berücksichtigung eines weiteren Ziels hat in diesem Fall keinen Einfluss auf die Lösung des Entscheidungsproblems.

Ist die Bernoulli-Regel rational?

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die klassischen Regeln für Entscheidungen bei Unsicherheit (Maximin, Maximax, Niehans-Savage, Laplace) kritischen Fragen nach ihrer Rationalität schwerlich standhalten (vgl. die ergänzenden Bemerkungen "Rationalität der Regel" im Abschnitt "Entscheidungen bei Unsicherheit").

Demgegenüber befinden wir uns bei der Anwendung des Nutzenerwartungswerts in einer besseren Lage. Sie erweist sich nämlich als logisch zwingend, *sofern man bestimmte plausible Axiome rationalen Verhaltens akzeptiert*. Wir werden auf diese und verwandte Begründungsfragen nicht näher eingehen und verweisen auf die umfangreiche Literatur zu diesem Thema.

Axiome der Vollständigkeit, Stetigkeit und Unabhängigkeit für Präferenzordnungen erörtert Eisenführ/Weber: *Rationales Entscheiden*. Springer Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1999, S. 212 f. Eine etwas andere, aber gleichwertige Grundlegung findet man bei Luce/Raiffa: *Games and Decisions*. Wiley: New York 1957, Chap. 2.