Optimales Stoppen

■ Situation und Problemstellung

Wir erhalten eine Folge von sich nacheinander anbietenden Gelegenheiten $G_1, G_2, \ldots, G_n$; für eine von ihnen müssen wir uns entscheiden. Es kann sich dabei um Kaufangebote handeln, Parkplätze (an denen wir suchend vorbeifahren), Stellenbewerbungen, und dgl. mehr. Nachdem eine Gelegenheit geprüft wurde, können wir anhalten und zugreifen; andernfalls ist sie verpasst und kehrt nicht wieder.

Gegenstand der Untersuchung ist die folgende Auswahlmethode:

Stoppregel

Zunächst werden die Gelegenheiten $G_1, \ldots, G_{s-1}$ geprüft und die beste von ihnen vorgemerkt. Von den nachfolgenden Gelegenheiten wird nun die erste ausgewählt, die besser ist als die beste unter den ersten $s-1$.

■ Das Entscheidungsproblem in Normalform

Das Entscheidungsproblem besteht in der Frage, für welchen Wert von s die obige Stoppregel optimal ist. Aus der geschilderten Verfahrensweise ergeben sich n Handlungsalternativen $a_1, \ldots, a_n$, wobei a_i bedeutet:

$$\textit{Benutze die Stoppregel für } s = i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Betrachten wir a_1. In diesem Fall findet offenkundig keine Vorprüfung statt, d.h. die erste Gelegenheit G_1 wird in jedem Fall gewählt.

Nun zu den Umweltbedingungen $b_1, \ldots, b_n$, auf die wir mit unseren Alternativen treffen. Es sind dies gerade die n (sich gegenseitig ausschließenden) Möglichkeiten b_j, die besagen, dass G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ die beste unter den n Gelegenheiten ist. Dabei wird unterstellt, dass es *genau eine* beste Gelegenheit gibt. Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten wollen wir $p_j = P(b_j) = \frac{1}{n}$ $(1 \leq j \leq n)$ annehmen.

Schließlich benötigen wir eine Nutzenmatrix U. Wir definieren den Nutzen u_{ij} als die Wahrscheinlichkeit, dass bei Ausführung von a_i die Gelegenheit G_j ausgewählt wird. Entscheidet man sich nämlich unter der Bedingung b_j für die Alternative a_i, so ist u_{ij} ein Maß dafür, mit G_j die beste Gelegenheit auszuwählen.

■ Aufstellung der Nutzenmatrix

Aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich zunächst die erste Zeile der Nutzenmatrix $U: u_{11} = 1$, $u_{12} = \ldots = u_{1n} = 0$.

Für das Folgende werde $2 \leq i \leq n$ vorausgesetzt.

Wir beobachten: Es ist keinesfalls sicher, dass wir mit der Stoppregel Erfolg haben und die beste Gelegenheit erwischen. Befindet sich diese nämlich unter den ersten $i-1$, d.h. tritt eine der Bedingungen $b_1, \ldots, b_{i-1}$ ein, so gehen wir bei den späteren Prüfungen leer aus, es wird also $u_{ij} = 0$ für $1 \leq j \leq i-1$.

Somit bleibt u_{ij} für $j \geq i$ zu berechnen. Die Gelegenheit G_j wird genau dann ausgewählt, wenn die beste der ersten $j-1$ Gelegenheiten sich schon unter den ersten $i-1$ befindet. Andernfalls würde nämlich gerade *diese* Gelegenheit schon ausgewählt, bevor G_j überhaupt geprüft wird. Die Wahrscheinlichkeit u_{ij} ergibt sich daher als Verhältnis der $i-1$ günstigen zu den $j-1$ möglichen Fällen:

$$u_{ij} = \frac{i-1}{j-1}$$

Die i-te Zeile ($i \geq 2$) von U lautet daher:

$$\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \frac{i-1}{i}, \frac{i-1}{i+1}, \ldots, \frac{i-1}{n-1}\right)$$

U ist somit eine obere Dreiecksmatrix; in ihrer Hauptdiagonalen stehen lauter Einsen, darunter lauter Nullen.

■ Der Nutzenerwartungswert und seine Deutung

Es bezeichne E_{ij} das Ereignis, dass

a) G_j die beste Gelegenheit ist *und*

b) G_j ausgewählt wird, wenn wir gemäß a_i vorgehen (d.h. die Stoppregel mit $s = i$ anwenden).

Da a) und b) voneinander unabhängig sind, ergibt sich nach der Produktregel:

$$P(E_{ij}) = p_j \cdot u_{ij} = \frac{1}{n} \cdot u_{ij}$$

Zur Lösung des Entscheidungsproblems berechnen wir die Nutzenerwartungswerte der a_i. Offenbar ist $\mathrm{EU}(a_i) = \sum_{j=1}^{n} P(E_{ij}) = P(E_{i1} + \ldots + E_{in})$, d.h. der Nutzenerwartungswert von a_i lässt sich als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses deuten, dass bei a_i die beste Gelegenheit gefunden wird.

Es gilt $\mathrm{EU}(a_1) = \frac{1}{n}$ und für $i \geq 2$:

$$\mathrm{EU}(a_i) = p_1 u_{i1} + \ldots + p_n u_{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i-1}{j-1}$$

Wir kürzen die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Summe sinngemäß mit $p(i, n)$ ab und erhalten

$$p(i,\, n) = \frac{i-1}{n}\left(\frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \text{ für } 2 \leq i \leq n$$
$$\text{und } p(1,\, n) = \frac{1}{n}$$

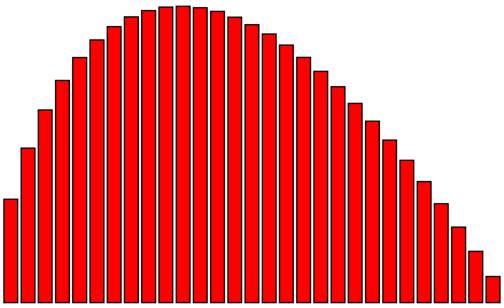
■ Lösung des Entscheidungsproblems

Wir bestimmen i so, dass $\mathrm{EU}(a_i)$ (= $p(i, n)$) maximal wird.

Machen wir uns ein Bild von der Situation bei $n = 10$ Gelegenheiten. Zunächst eine Tabelle der Werte $p(i, n)$ für $i = 2, \ldots, 10$:

2	0.282897
3	0.365794
4	0.39869
5	0.398254
6	0.372817
7	0.327381
8	0.265278
9	0.188889
10	0.1

Es ist $i_{\max} = 4$. Für $n = 30$ betrachten wir ein Histogramm:



Rechnerisch ergibt sich $i_{\max} = 12$. (Man beachte, dass $i_{\max}$ jeweils von n abhängt.) Wir tabellieren die Werte n, $i_{\max}$, $p(i_{\max}, n)$ in drei Spalten:

2	2	0.5
3	2	0.5
4	2	0.458333
5	3	0.433333
10	4	0.39869
20	8	0.384209
30	12	0.378651
40	16	0.375743
50	19	0.374275
100	38	0.371043
500	185	0.368512
1000	369	0.368196

Es fällt auf, dass sich das Maximum der $p(i,\ n)$ in der Nähe von 0.37 zu stabilisieren scheint. Gleichzeitig liegt aber auch der Anteil $\frac{i_{\max}}{n}$ bei diesem Wert. In der Tat lässt sich durch eine genauere Analyse nachweisen:

$$\frac{i_{\max}}{n} \sim \frac{1}{e} \text{ und } p(i_{\max},\ n) \sim \frac{1}{e}$$, wobei e die Eulersche Zahl ist (= 2.71828...)

Dabei bezeichnet $\sim$ die sog. asymptotische Gleichheit, welche besagt, dass der Quotient aus linker und rechter Gleichungsseite gegen 1 strebt (für $n \to \infty$). Für Einzelheiten der Analyse vgl. Arthur Engel [*Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Band 2. Klett: Stuttgart 1976, S. 201 f].

■ Fazit

Das Modell liefert uns eine praktische Faustregel, mit der wir unser Auswahlverhalten optimieren können. Sie lautet: Wende die Stoppregel für $s = \frac{n}{e} \approx 0.368 \cdot n$ an, oder noch gröber: Lasse zunächst ein gutes Drittel (knapp 37 %) der Gelegenheiten passieren und wähle danach die erste bessere Gelegenheit.