Das St. Petersburger Spiel

Peter betätigt sich als Bankhalter. Er wirft eine Münze solange, bis *Zahl* erscheint. Einem Spieler (den wir Paul nennen) sichert er für den Einsatz $e > 0$ die Auszahlung von $(2^m + 1)\, e$ zu, wenn *Zahl* beim m-ten Münzwurf auftritt. Der Reingewinn beträgt dann für Paul $2^m\, e$.

Bei diesem sog. *St. Petersburger Spiel* handelt es sich um eine Wette vom Pauschaltyp, deren Quote von der Wartezeit eines bestimmten Ereignisses (hier: Zahlseite der Münze) abhängt (vgl. Abschnitt "Multiwetten"). Paul gewinnt, wenn er und Peter den Ablauf der Wartezeit noch erleben. Theoretisch, d.h. bei unbegrenzter Versuchslänge, gewinnt Paul aber immer. Die Wette ist somit für keinen Einsatzbetrag fair. Dabei ist Paul's Gewinnerwartung sogar positiv unendlich:

$$E(G) = \frac{1}{2} \cdot 2\, e + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2\, e + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^3\, e + \ldots = e + e + e + \ldots = \infty$$

Die Konsequenz daraus scheint paradox. Paul müsste nämlich die Teilnahme an der Petersburger Wette einem sicheren Geldgeschenk (von beliebiger Höhe!) vorziehen. Dass er das, gerade <u>wenn</u> er sich rational entscheidet, niemals tun würde, liegt unter anderem daran, dass die wirklich großen Gewinne extrem unwahrscheinlich sind.

Offenbar stellt der Erwartungswert der Gewinnbeträge im Allgemeinen nicht unbedingt ein geeignetes Kriterium dar, mit dem rationale Entscheidungen zu treffen sind.

Es gibt mindestens zwei Ansätze, den paradoxen Charakter der Wette zu mildern bzw. zum Verschwinden bringen: a) durch Begrenzung der Wartezeit, und b) durch Einführung einer Nutzenfunktion.

■ Begrenzung der Wartezeit

Wir nehmen an, die Münze werde höchstens s-mal geworfen. Für den damit verbundenen Reingewinn G_s ergibt sich dann der <u>endliche</u> Erwartungswert:

$$E(G_s) = \sum_{m=1}^{s} \frac{1}{2^m} \cdot 2^m\, e + \frac{1}{2^s}\,(-e) = \left(s - \frac{1}{2^s}\right) e$$

Offenbar ist die Wette für alle $s \geq 1$ günstig (und daher niemals fair). Angenommen, Paul wettet 100 Euro. Dann ist für $s > 10000$ die Wette etwas mehr als 1 Mio Euro wert? Nichtsdestoweniger wird man vernünftigerweise den sicheren Betrag (1 Mio €) der Teilnahme an der Wette vorziehen.

Bei niedriger Wartezeitschranke sieht die Sache anders aus. Zum Beispiel ergibt sich für $s = 10$ bei einem Einsatz von 1 Euro: $E(G_{10}) = 10 - \frac{1}{2^{10}} \approx 9.99902$. In diesem Fall wird die Gewinnerwartung genau dann übertroffen, wenn die Wartezeit ≥ 4 beträgt. Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt bei 0.124, ist also nicht so klein, dass der sichere Zugewinn von 10 Euro einer Teilnahme an der Wette von vornherein vorzuziehen wäre. Ob eine Person dazu neigt, das jeweilige Risiko einzugehen, hängt davon ab, in welcher Weise sie Gewinne (Geldbeträge) bewertet. Durch Einführung einer Nutzenfunktion ist es möglich, das entsprechende Verhaltensmuster mathematisch auszudrücken.

■ Einführung einer Nutzenfunktion

Auf Bernoulli geht die Idee zurück, dem Spieler Paul eine logarithmische Nutzenfunktion zuzuschreiben (vgl. Abschnitt "Logarithmischer Nutzen"):

$$u(c) = k \log c + k_0$$

Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen:

> Der Nutzenerwartungswert der Petersburger Wette ist gleich dem Nutzenwert des 4-fachen Einsatzes.

Beweis: Für Paul's Reingewinn $c = 2^m\, e$ erhalten wir den Nutzen $u(2^m\, e) = k\, m \log 2 + u(e)$, und damit:

$$\mathrm{EU} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m u(2^m\, e) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{k\, m \log 2}{2^m} + \frac{u(e)}{2^m}\right)$$

Der erste Teil der Summe liefert $(k \log 2) \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^{m-1}} = 2\, k \log 2$; der zweite Teil ist gleich $u(e)$. Insgesamt ergibt sich für den Nutzenerwartungswert:

$$\mathrm{EU} = 2\, k \log 2 + k \log e + k_0 = k(\log 4 + \log e) + k_0 = u(4\, e)$$

■

Folgerung: Wenden Peter und Paul dieselbe (logarithmische) Nutzenfunktion auf alle Geldbeträge an, so wird das Petersburger Spiel (mit unbegrenzter Wartezeit) genau dann zu einer fairen Wette, wenn $\mathrm{EU} = u(4\, e) = 0$. Der Einsatz von Paul beträgt dann $\frac{1}{4} \exp\left(-\frac{k_0}{k}\right)$. Falls $k_0 = 0$ (d.h. falls 1 Geldeinheit den Nutzen 0 hat), ergibt sich $e = 0.25$.

Anmerkung: Auch andere als logarithmische Nutzenfunktionen führen zu vergleichbaren Ergebnissen. Ist z.B. $u(c) = k \sqrt{c} + k_0$, so gilt $\mathrm{EU} = u\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right) e\right)$ (Beweis als Übung!) – Auch in diesem Fall ergibt sich aus $\mathrm{EU} = 0$ ein Einsatzbetrag $e > 0$, für den die Wette fair wird: $e = \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.