
Nutzenfunktionen als Modelle von Risikoeinstellungen

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie man das Entscheidungsverhalten einer Person, genauer: ihre Einstellung zum Risiko, mathematisch beschreiben kann.

Die Risikoprämie

Die einfachste Vorgehensweise besteht darin, der Person eine Wette a (häufig auch *Lotterie* genannt) anzubieten und sie um Angabe eines (persönlichen) Sicherheitsäquivalents $SE(a)$ zu bitten. Liegt $SE(a)$ unterhalb der (objektiven) Gewinnerwartung, so drückt sich darin eine Scheu vor dem Risiko aus. Ist umgekehrt die Gewinnerwartung kleiner als das Sicherheitsäquivalent, so bedeutet dies Risikofreudigkeit.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel:

Die Wette a habe zwei gleichwahrscheinliche Ausgänge b_1, b_2 (die hier für die "Umweltbedingungen" im allgemeinen Entscheidungsschema stehen) und die Konsequenzen (Reingewinne) $c_1 = 100, c_2 = -10$. Dann lautet der Erwartungswert des Reingewinns G_a :

$$E(G_a) = \frac{1}{2} \cdot c_1 + \frac{1}{2} \cdot c_2 = 45$$

Gibt nun jemand als sein Sicherheitsäquivalent $SE(a) = 30$ € an, so hat dies zur Folge, dass er einen sicheren Geldbetrag ab 30 € der Teilnahme an der Lotterie a vorzieht.

Die Differenz $E(G_a) - SE(a) = 15$ € wird *Risikoprämie* genannt. Im Beispiel beträgt sie 15 €. Sie ist gerade derjenige Betrag, auf den man *a priori* verzichtet, wenn man die sichere Alternative der risikobehafteten Alternative vorzieht.

■ Fazit

Das Entscheidungsverhalten einer Person bezüglich einer Handlungsalternative a mit unsicherem Ausgang ist risikoscheu (risikoneutral, risikofreudig), wenn die zugehörige Risikoprämie $RP(a) > 0$ ($= 0, < 0$) ist.

■ Teilnahme an einer Wette mit negativer Gewinnerwartung

Bei vielen unsicheren Handlungen a (insbesondere bei allen Glücksspielen) kann man nicht nur gewinnen, sondern (auch im Mittel) verlieren. Lässt sich jemand darauf ein, so zeigt er damit Risikofreudigkeit. Wir wollen dies begrifflich exakt nachvollziehen.

Die in Betracht kommenden Konsequenzen seien reelle Zahlen (als Reingewinne interpretiert). Sei nun $E(G_a) < 0$. Entscheidet sich jemand für die Alternative a , so präferiert er sie gegenüber der sicheren Konsequenz 0; sein Sicherheitsäquivalent $SE(a)$ muss somit erst recht > 0 sein! Daraus ergibt sich für die Risikoprämie:

$$RP(a) = E(G_a) - SE(a) < 0$$

was gleichbedeutend ist mit risikofreudigem Entscheidungsverhalten.

■ Abschluss einer Versicherung

Wer eine Versicherung abschließt, zeigt eine Scheu vor dem Risiko. Er zieht die von ihm zu leistende sichere Einzahlung (mithin ein negatives Sicherheitsäquivalent) für die Versicherungsprämie der Hinnahme eines riskanten Schadens vor, dessen erwarteter (mittlerer) Verlust geringer als die Versicherungsprämie ist. Das hat zur Folge, dass die Risikoprämie > 0 ausfällt.

In vielen Lebensbereichen kann ein versicherbarer Schaden erheblich negative, bisweilen sogar ruinöse Auswirkungen für den Einzelnen haben. Es ist daher nicht unvernünftig, in solchen Handlungsfeldern risikoaversiv zu entscheiden. Dieselbe Person kann sich gleichwohl anderen Risiken gegenüber weniger zurückhaltend zeigen (z.B. bei der Geldanlage oder auch nur bei der wöchentlichen Teilnahme an der Staatlichen Lotterie). Ein Widerspruch entsteht dadurch nicht. *Die Modellierung der Risikoeinstellung bezieht sich immer nur auf ein spezifisches Entscheidungsfeld.*

Typen von Nutzenfunktionen

Die Information über das Entscheidungsverhalten einer Person für ein gegebenes Konsequenzen-Intervall $C = [c_{\min}; c_{\max}]$ steckt in der mit ihr assoziierten Nutzenfunktion, genauer: in ihrem Krümmungsverhalten über dem Intervall C .

Wir wollen diesen Sachverhalt an verschiedenen Beispieltypen zunächst anschaulich erörtern. Dabei wird (zwecks Vergleichbarkeit) stets vorausgesetzt, dass die auftretenden Nutzenfunktion normiert sind. Ferner mögen (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) nur streng monoton wachsende Nutzenverläufe in Betracht kommen.

Für die grafische Darstellung werden die zu bewertenden Konsequenzen (Gewinne, Geldbeträge, etc.) durch reelle Zahlen zwischen $c_{\min} = 1$ und $c_{\max} = 100$ wiedergegeben.

■ Linearer Nutzen

Eine Funktion vom Typ

$$u_{\text{Lin}}(x) = k_0 + k_1 x$$

nennen wir *lineare Nutzenfunktion*. Der Nutzen von x wird (bis auf eine lineare Skalentransformation) durch x gemessen. (Es wird gleich deutlich werden, dass u_{Lin} *risikoneutrales* Entscheidungsverhalten beschreibt.)

Wir verschaffen uns eine Darstellung der Funktion in normierter Gestalt ($k_0 = -\frac{1}{99}$, $k_1 = \frac{1}{99}$):

```
<< Modellbildung`Normierung`
```

```
UfuncLin[x_] := Normiere[x, 1, 100]
```

```
UfuncLin[x]
```

$$-\frac{1}{99} + \frac{x}{99}$$

■ Logarithmischer Nutzen

Die (von Bernoulli verwendete) Funktion

$$u_{\text{Log}}(x) = k_0 + k_1 \log x$$

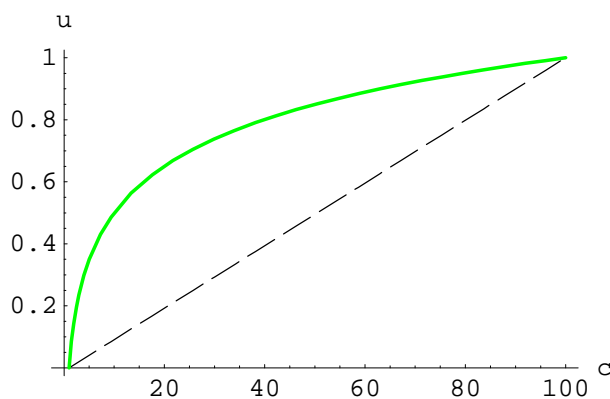
(im Abschnitt "Logarithmische Nutzenfunktion" aus plausiblen Annahmen hergeleitet) lautet in normierter Form ($k_0 = 0$, $k_1 = \frac{1}{\log 100}$):

```
UfuncLog[x_] := Normiere[Log[x], Log[1], Log[100]];
UfuncLog[x]
```

$$\frac{\text{Log}[x]}{\text{Log}[100]}$$

Zunächst ein grafischer Vergleich von logarithmischem und linearem Nutzen:

```
Graph1 = Plot[{UfuncLin[x], UfuncLog[x]}, {x, 1, 100},
  PlotStyle -> {{Dashing[{0.06, 0.02}], RGBColor[0, 0, 0]},
  {Thickness[0.007], RGBColor[0, 1, 0]}}, AxesLabel -> {"c", "u"}];
```



Dem Graphen lässt sich anschaulich entnehmen: Einem Nutzenwert (den wir uns am besten als Nutzenerwartungswert vorstellen) entspricht ein kleinerer Geldbetrag (den wir als Sicherheitsäquivalent deuten), wenn wir eine logarithmische anstelle einer linearen Nutzenfunktion verwenden. Dies deutet auf *Risikoaversion* hin.

Bemerkung: Einen qualitativ vergleichbaren Krümmungsverlauf (genauer: von unten konkav) zeigen die Nutzenfunktionen des Typs $u_{\text{Rad}}(x) = k_0 + k_1 \sqrt{x}$, auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

■ Quadratischer Nutzen

Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion lautet:

$$u_{\text{Quad}}(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2$$

Durch die Normierung werden nur zwei der Koeffizienten festgelegt. Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir $k_2 > 0$ voraussetzen und $k_1 = 0$ spezialisieren. Dann ist u_{Quad} streng monoton wachsend und (von unten) konvex.

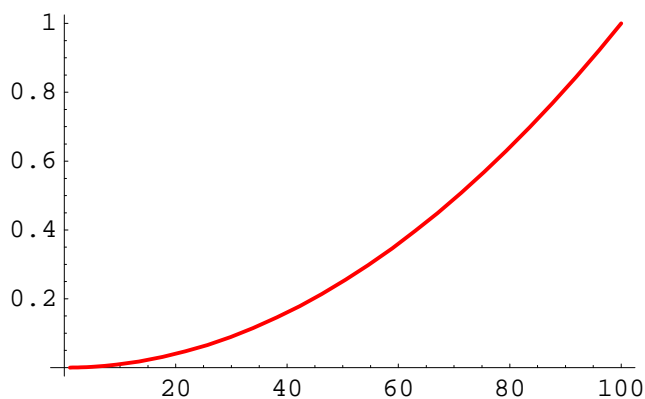
Wir erhalten:

```
UfuncQuad[x_] := -1 / 9999 + x^2 / 9999
UfuncQuad[x]
```

$$-\frac{1}{9999} + \frac{x^2}{9999}$$

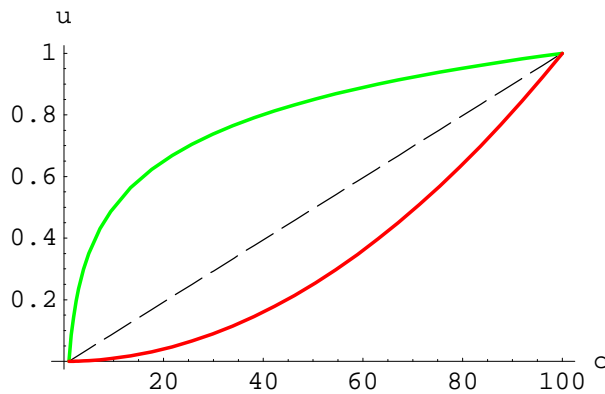
Die resultierende Kurve besitzt die oben verlangten Eigenschaften:

```
Graph2 = Plot[UfuncQuad[x], {x, 1, 100},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.007], RGBColor[1, 0, 0]}}];
```



Nun die Zusammenschau der drei Funktionsverläufe:

```
Show[Graph1, Graph2];
```



Ergänzend zu der früheren Beobachtung lässt sich sofort ablesen, dass ein gegebener Nutzenwert in diesem Fall für einen größeren Geldbetrag steht als bei Zugrundelegung der linearen (und erst recht der logarithmischen) Nutzenfunktion. Das deutet auf *Risikofreudigkeit* hin.

Risikoverhalten im Entscheidungsmodell

Der Zusammenhang zwischen den Krümmungseigenschaften einer Nutzenfunktion u und dem Verhalten bei riskanten Entscheidungen, das jemand zeigt, der u als Nutzenfunktion besitzt und die Bernoulli-Regel befolgt, wurde bisher (lediglich auf anschaulicher Grundlage) vermutet. Im Folgenden wollen wir diesen Sachverhalt innerhalb unseres Entscheidungsmodells präzisieren und streng beweisen.

■ Voraussetzungen und Hilfsbehauptungen

Die risikobehaftete Handlung a finde unter den einander ausschließenden Bedingungen b_1, \dots, b_n statt, wobei $p_j = P(b_j)$ die Wahrscheinlichkeit für die j -te Bedingung und c_j die bei b_j realisierte Konsequenz (am einfachsten als reellwertigen Geldbetrag vorzustellen) bezeichnet ($1 \leq j \leq n$).

Aus diesen Voraussetzungen folgt:

$$p_1 + \dots + p_n = 1 \text{ und } E(G_a) = \sum_{j=1}^n p_j c_j \text{ (Erwartungswert des Gewinns bei Entscheidung für } a \text{).}$$

Wir legen eine beliebige Nutzenfunktion u zu Grunde, die (1) im Konsequenzen-Intervall C streng monoton wächst und (2) eine eindeutige Umkehrfunktion u^{-1} besitzt; diese ist dann ebenfalls streng monoton wachsend (Begründung!).

Aus der Analysis werden folgende Aussagen herangezogen (gelegentlich in der Literatur auch als Definitionen verwendet):

1. Eine Funktion f ist **linear** gdw. $f(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) = s_1 f(x_1) + \dots + s_n f(x_n)$

Eine Funktion f auf C ist (von unten)

2. konkav gdw. $f(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) > s_1 f(x_1) + \dots + s_n f(x_n)$

3. konvex gdw. $f(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) < s_1 f(x_1) + \dots + s_n f(x_n)$

jeweils für alle $x_1, \dots, x_n \in C$ und für alle reellen $s_j \geq 0$ mit $s_1 + \dots + s_n = 1$.

Man mache sich etwa 2. anschaulich an dem Spezialfall $n = 2$, $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ klar: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

■ Satz über den Zusammenhang von Krümmung und Risikoverhalten

(1) u linear $\implies \text{RP}(a) = 0$

(2) u konkav $\implies \text{RP}(a) > 0$

(3) u konvex $\implies \text{RP}(a) < 0$

Beweis:

Zu (1). Es ist $\text{EU}(a) = \sum p_j u(c_j) = u(\sum p_j c_j) = u(E(G_a))$ aufgrund der Linearität von u (vgl. obige Aussage Nr. 1). Daraus ergibt sich für das Sicherheitsäquivalent: $\text{SE}(a) = u^{-1}(\text{EU}(a)) = E(G_a)$, und schließlich für die Risikoprämie: $\text{RP}(a) = E(G_a) - \text{SE}(a) = 0$.

Zu (2). Wendet man obige Aussage Nr. 2 auf u an, so folgt: $\text{EU}(a) = \sum p_j u(c_j) < u(\sum p_j c_j) = u(E(G_a))$. Da auch u^{-1} auf C streng monoton wächst, hat man $\text{SE}(a) = u^{-1}(\text{EU}(a)) < E(G_a)$ und daher $\text{RP}(a) > 0$.

Zu (3). Analog (2). – Als Übung! ■

Will man den Satz anwenden, so muss gesichert sein, dass die in Betracht gezogene Nutzenfunktion (auf der Konsequenzenmenge C) linear oder konkav oder konvex ist. Anstatt der hier im Beweis verwendeten Eigenschaften lassen sich dazu Kriterien verwenden, welche auf der Differenzierbarkeit von u beruhen (i.a. von der Schule her bekannt im Zusammenhang mit sog. Kurvendiskussionen):

Ist u auf C zweimal differenzierbar und $u''(x) \geq 0$ (≤ 0) für alle $x \in C$, so ist u konvex (bzw. konkav).

Wir zeigen mit diesem Kriterium, dass u_{Log} konkav ist. Es ist $u_{\text{Log}}'(x) = \frac{1}{x \log 100}$ und $u_{\text{Log}}''(x) = -\frac{1}{x^2 \log 100} < 0$ für $x \in [1; 100]$. Man mache sich die *geometrische* Bedeutung dieser Relation klar: Der Anstieg der logarithmischen Nutzen-Kurve nimmt ab, wenn x das Intervall von 1 bis 100 durchläuft!

Noch einfacher ergibt sich $u_{\text{Quad}}''(x) = \frac{2}{9999} > 0$ und damit die Konvexität der quadratischen Nutzenfunktion.

■ Eine Abschätzung für das Sicherheitsäquivalent

Nach Definition ist das Sicherheitsäquivalent c^* einer risikobehafteten (unsicheren) Alternative a Lösung der Gleichung $u(c^*) = \text{EU}(a)$.

Ist statt des Nutzenerwartungswertes $EU(a)$ lediglich der Erwartungswert $\mu := E(G_a)$ bekannt, so kann man das Sicherheitsäquivalent $SE(a)$ immerhin noch durch ein Intervall einfangen. Wir führen die einfache Überlegung für den Fall einer konkaven Nutzenfunktion u durch. Sowohl u als auch u_{Lin} werden als normiert und streng monoton wachsend vorausgesetzt.

Dem Beweis des obigen Satzes entnehmen wir (vgl. (2)) zunächst: $EU(a) < u(\mu)$. Da $u(c) > u_{\text{Lin}}(c)$ für alle betrachteten Konsequenzenwerte c gilt, hat man:

$$EU(a) = \sum p_j u(c_j) > \sum p_j u_{\text{Lin}}(c_j) = u_{\text{Lin}}(\sum p_j c_j) = u_{\text{Lin}}(\mu)$$

Insgesamt ergibt sich aus beiden Ungleichungen:

$$u_{\text{Lin}}(\mu) < EU(a) < u(\mu)$$

Mit u ist auch u^{-1} monoton wachsend. Anwendung der Umkehrfunktion auf die letzte Ungleichung liefert daher die beidseitige Abschätzung für das Sicherheitsäquivalent:

$$u^{-1}(u_{\text{Lin}}(\mu)) < SE(a) < \mu$$

Im Fall einer konvexen Nutzenfunktion hat man lediglich die Richtung der Ungleichung umzukehren, d.h. $<$ durch $>$ zu ersetzen (Beweis als Übung).