Sensitivitätsanalyse

■ Allgemeine Problemstellung

Trifft man eine Entscheidung unter Risiko nach der Bernoulli-Regel, so benutzt man Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ für die Berechnung der zu maximierenden Wertfunktion:

$$\mathrm{EU}(a_i) = p_1\, u_{i\,1} + \ldots + p_n\, u_{i\,n}$$

Vielfach handelt es sich dabei nicht um objektive Wahrscheinlichkeiten (wie man sie aus physikalischen Symmetrien oder Massenversuchen mit relativen Häufigkeiten gewinnt), sondern um Werte, die auf subjektiven Einschätzungen nach vorliegendem Wissensstand beruhen (epistemische Wahrscheinlichkeiten).

Derartige Annahmen können sich ändern, wenn neue Informationen über die Umweltbedingungen $b_1, \ldots, b_n$ bekannt werden. Ist $(p_1', \ldots, p_n')$ eine *geänderte* W-Verteilung, so liegt die Frage nahe, wie sich dies auf die zugehörigen Nutzenerwartungswerte $p_1'\, u_{i\,1} + \ldots + p_n'\, u_{i\,n}$ auswirkt, und vor allem: auf die Lösung des Entscheidungsproblems. Am meisten wird man sich dafür interessieren, ob eine einmal getroffene Entscheidung (oder Präferenzordnung) zu revidieren ist.

In einer Sensitivitätsanalyse werden Spielräume für die Wahrscheinlichkeiten ermittelt, innerhalb derer die Lösung eines Entscheidungsproblems sich nicht ändert. Dabei treten naturgemäß Schwellenwerte auf, deren Über- oder Unterschreitung zu einer anderen Lösung führt.

■ Noch einmal: Spatz oder Taube?

Wir wollen das grundsätzliche Vorgehen bei der Sensitivitätsanalyse an dem Beispiel "Spatz oder Taube" (vgl. den Abschnitt "Spatz oder Taube: Das Sicherheitsäquivalent") erläutern. Dazu werde die (leicht abgeänderte) Nutzenmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

zu Grunde gelegt und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (für die Treffwahrscheinlichkeit des Schützen Theobald) durch die Variable p ersetzt. Die Alternative $a_1(= \textit{sich mit dem sicheren Spatz begnügen})$ behält natürlich ihren Nutzenerwartungswert 1. Für $a_2(= \textit{auf die Taube schießen})$ gilt nun aber

$$\mathrm{EU}(a_2) = p \cdot 4 + (1 - p) \cdot (-1) = 5\, p - 1$$

Zunächst fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit p, für die Indifferenz besteht:

$$1 = \mathrm{EU}(a_1) = \mathrm{EU}(a_2) = 5\, p - 1$$

Es ergibt sich der sog. *Break-Even*-Wert $p = 0.4$. Man erkennt sofort, dass $\mathrm{EU}(a_2) > \mathrm{EU}(a_1)$ genau dann, wenn $p > 0.4$. D.h., trifft Theobald mehr als 40 % seiner (vergleichbaren) Ziele, so sollte er sich für die Taube entscheiden, bei weniger als 40 % entsprechend für den Spatz.