Stand: 2001-03-29

Zur Einführung in die (Sprache der) Logik

Was ist Logik?

Die berühmte *Encyclopaedia Britannica* unterteilt das Wissen der Menschheit in sieben Hauptzweige. Einer von ihnen ist die Logik, was auf ihre in der Tat überragende Stellung hinweist. Die Logik ist ursprünglich eine methodische Teildisziplin der Philosophie, verwoben mit der Reflexion über die Sprache und den Wahrheits- bzw. Erkenntnisbegriff. Sie besitzt aber auch eine enorme Bedeutung für die heutige Wissenschaft und Technologie. Seit dem ausgehenden 19. Jahrhundert ist das Schicksal der Logik mit dem der Mathematik, später auch mit dem der Informatik, aufs engste verknüpft.

■ Aufgaben der Logik

Dieser Abschnitt enthält einige knappe Anmerkungen zum historischen Ursprung und zur Entwicklung der Logik. Vor diesem Hintergrund wird die Bedeutung der Logik herausgestellt, die im übrigen nicht auf die Mathematik beschränkt bleibt. Ferner werden einige der Ziele skizziert, die sich mit ihrem Studium erreichen lassen.

■ Ursprung der Logik bei Aristoteles

Die Logik hat eine bis in die Antike zurückreichende Geschichte. Als ihr Gründer gilt der griechische Philosoph Aristoteles (384-322 v.u.Z.). Aristoteles machte eine wesentliche Beobachtung: Es gibt Argumentationsfiguren – d.h. Muster von Begründungen für Behauptungen –, deren Gültigkeit nicht von ihrem Inhalt abhängt.

Beispiel:

> *Wenn alle Hunde Säugetiere sind und alle Säugetiere Lebewesen, dann sind alle Hunde Lebewesen.*

Die Gesamt-Behauptung ist offenbar richtig. Ihre Gültigkeit beruht aber nicht darauf, dass die in ihr vorkommenden Teilsätze wahr sind. Vielmehr ist sie bereits wahr allein aufgrund ihrer Form, das heißt: sie bleibt auch dann gültig, wenn wir die Eigenschaften (Prädikate) 'Hund', 'Säugetier' und 'Lebewesen' durch andere ersetzen, etwa: 'Rabe', 'Vogel' und 'weiß'. Die so entstehende Behauptung lautet:

> *Wenn alle Raben Vögel sind und alle Vögel weiß, dann sind alle Raben weiß.*

Diese Aussage ist als ganze korrekt, obwohl gleich zwei ihrer Teilsätze faktisch falsch sind. Auch wenn sämtliche Teilsätze (faktisch) falsch sind, berührt dies nicht die Gültigkeit des Ganzen. Zum Beispiel:

> *Wenn alle Lebewesen Säugetiere sind und alle Säugetiere Hunde, dann sind alle Lebewesen Hunde.*

Mit der Entdeckung solcher Argumentations- oder Schlussfiguren - nach Aristoteles *Syllogismen* genannt - ist ein wesentlicher erster Schritt zu einer wissenschaftlichen Logik getan. Um ihren *formalen* Charakter deutlicher herauszuarbeiten, sollten die austauschbaren Teile einer Schlussfigur noch durch Stellvertreter (Variablen) ersetzt werden. Unser Beispiel lautet dann, etwa bei Verwendung der Buchstaben *P*, *Q*, *R* für die vorkommenden Prädikate:

Alle P sind Q
Alle Q sind R

Alle P sind R

Bei der hier gewählten Anordnung tritt zudem die Gestalt der Argumentation klar hervor. Die heutige Logik (mit ihren verfeinerten Sprachmitteln) kann diese Schlussfigur nicht nur mühelos wiedergeben, sondern lässt ihre Tiefenstruktur noch deutlicher sichtbar werden.
Auf jeden Fall stellt unser Beispiel eines der zahlreichen Gesetze der Logik dar. Solche logischen Wahrheiten zu entdecken und zu rechtfertigen, mag für sich genommen eine interessante Aufgabe sein, doch ist dies keinesfalls nur Selbstzweck und beileibe nicht die einzige Aufgabe der Logik. Fragen wir uns daher als nächstes nach den Zielen des Logikstudiums.

■ Warum sollte man sich mit Logik beschäftigen?

Lange Zeit galt Logik als eine grundlegende Disziplin, ja als eine Art Kulturtechnik. So positionierten mittelalterliche Universitäten ihr Logik-Angebot im Rahmen des sog. Trivium (zusammen mit Grammatik und Rhetorik), eine Tradition, in der die Logik sich nicht immer den besten Ruf erworben hat. Hören wir uns einmal an, was Goethe seinen Mephisto in der Schülerszene des *Faust* sagen lässt:

Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn …

Diese bissige Geringschätzung beruht offenbar auf der Vorstellung, Logik sei eine Methode, mit der sich Gedanken und Problemlösungen hervorbringen lassen. Das allerdings ist ein Missverständnis, das Logik mit Heuristik (*ars inveniendi*, "Findungskunst") verwechselt. Stattdessen ist Logik zu verstehen als *ars iudicandi* ("Beurteilungskunst"), d.h. eine methodisches Instrumentarium, um Argumentationen und Begriffsbildungen nachträglich zu klären und auf ihre Richtigkeit und Brauchbarkeit zu überprüfen. So gesehen bildet die Logik einen allgemeinen Rahmen für die wissenschaftliche Forschung, gleichsam einen Standard für rationales Denken. Charles S. Peirce (1839-1914) hat dies in seinem Aufsatz *How to Make Our Ideas Clear* als geradezu vordringlichste Aufgabe der Logik bezeichnet und angemerkt, dass es gerade die Verächter der Logik seien, die ihrer am meisten bedürfen.

Die Logik in ihrer heutigen Gestalt ist aber bei weitem nicht auf diese Aufgabe beschränkt. Sie ist eine produktive mathematische Disziplin mit zahlreichen bedeutsamen Anwendungen nicht nur innerhalb der Mathematik, sondern z.B. auch in der Linguistik, Kognitionswissenschaft oder Informatik.

Schließlich soll hier konkreter dargelegt werden, welche Vorteile man sich von einer gründlichen Einarbeitung in die Sprache der Logik versprechen darf. Ich nenne hier vor allen anderen folgende vier Zielstellungen:

** Die mathematische "Umgangssprache", mehr noch die Sprache allgemein, wird besser verstanden, und das Formulieren mathematischer Sachverhalte auf eine solide Grundlage gestellt.*
** Der Begriff der logischen Folgerung wird klar herausgearbeitet; er ist zentral und grundlegend für das Verständnis der modernen Logik.*
** Formales Arbeiten verliert sein "Geheimnis", insbesondere wird deutlich, was alles in dem Begriff des Beweises (und der Tätigkeit des Beweisens) steckt.*
** Einige Hauptresultate der Logik werden propädeutisch entwickelt und in ihrer fundamentalen Bedeutung nachvollziehbar.*

■ Anmerkung zur historischen Entwicklung

Man kann Logik studieren, ohne etwas von ihrer Entwicklungsgeschichte wissen zu müssen. Dennoch ist es lehrreich zu sehen, wie sich der Beitrag der Tradition in bedeutsamen Problemen, Begriffen und Bezeichnungssystemen niedergeschlagen hat. Natürlich kann und soll dies hier nicht einmal skizziert, sondern allenfalls angedeutet werden.

Über zwei Jahrtausende haben die logischen Schriften des Aristoteles, zusammengefasst im sogenannten *Organon*, eine dominierende Wirkung ausgeübt. Wichtige Beiträge lieferte – noch in der Antike – auch die megarisch-stoische Schule (im wesentlichen Aussagenlogik) und später die ganze Epoche der Scholastik (Duns Scotus, Petrus Hispanus, William Ockham, u.v.a.). Unter anderem wurde die *Syllogistik*, d.h. die systematische Untersuchung der von Aristoteles entdeckten Syllogismen, weiter ausgebaut und verfeinert.

Im 17. Jahrhundert hat der große Universalgelehrte, Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) der Logik bedeutende Impulse gegeben. Seine Studien betreffen algebraische Aspekte der Logik (Klassenlogik, Aussagenlogik) und die Vision einer *characteristica universalis*: die Idee eines allgemeinen logischen Kalküls zur Lösung beliebiger Probleme, die heute allerdings als unrealisierbar angesehen werden muss.

Ihre heutige mathematisch-symbolische Gestalt erhielt die Logik vornehmlich im späten 19. Jahrhundert durch Forscher wie George Boole (*The Mathematical Analysis of Logic*, 1847), Gottlob Frege (*Begriffsschrift*, 1879), Giuseppe Peano (*Arithmetices Principia*, 1889) und Russell/Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910). Aufbauend auf diesen Leistungen kam die Logik in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts durch eine Reihe herausragender Beiträge zu hoher Blüte. Die berühmtesten Resultate lieferte Kurt Gödel (1906-1978); in ihnen wird die in bestimmten Hinsichten prinzipielle Begrenztheit logisch-mathematischer Kalküle (1. Stufe) nachgewiesen. Wertvolle und bleibende Beiträge sind auch der Polnischen Logikschule um J. Lukasiewicz und S. Lesniewski zu verdanken, z.B. die von Alfred Tarski geschaffene moderne Gestalt der Semantik und Modelltheorie. Gerhard Gentzen (1909-1945), einer der bedeutendsten Logiker des 20. Jhs., hat bleibende Beiträge zum sog. natürlichen Schließen und damit zur Beweistheorie geliefert. In den Vereinigten Staaten übte Stephen. C. Kleene nach dem Zweiten Weltkrieg mit seinem bahnbrechenden Lehr- und Grundlagenwerk zur *Metamathematik* nachhaltigen Einfluss auf spätere Logiker-Generationen aus.

■ Hinweise zu Lektüre und Studium

Die Literatur zur Logik ist überaus umfangreich und nicht mehr zu überblicken. Auch einführende Werke gibt es in enorm großer Zahl und Vielfalt. Dabei weichen die Symbolsysteme, Bezeichnungsweisen und Kalküle oft stark, zuweilen sogar erheblich voneinander ab. Anfängern wird es dadurch nicht eben leicht gemacht, mehrere Lehrbuchtexte parallel nebeneinander zu verwenden. Es kann schnell passieren, dass so im Ergebnis mehr Verwirrung als Klarheit entsteht - also das Gegenteil dessen, was durch logische Studien eigentlich erreicht werden soll.

Es ist daher empfehlenswert, den ersten Zugang zunächst über nur einen Lehrtext anzustreben. Anschließend können anders konzipierte und/oder weiterführende Werke das bis dahin erworbene Wissen ergänzen, vertiefen und abrunden.

Die folgende Liste von (zweifellos subjektiv gefärbten) Lektürehinweisen berücksichtigt vor allem einführende Lehrbücher, die sich überwiegend auch an Nicht-Mathematiker richten.

A. Tarski: *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik* [elementare und gut verständliche Darstellung durch einen Meister des Fachs]

J. Barwise; J. Etchemendy: *The Language of First-Order Logic (incl. Tarski's World)* [didaktisch geschickte Einführung, originelles Konzept mit beiliegender Mikrowelt-Software]

T. Tomoczko; J. Henle: *Sweet Reason. A Field Guide to Modern Logic* [ausgedehnte Tour durch das große und bunte Reich der Logik; einfach zu lesen, unterhaltsam]

F. von Kutschera; A. Breitkopf: *Einführung in die moderne Logik* [etwas trockener Kompaktkurs für Leute, die schnell ans Ziel kommen wollen; elementar]

H. Hermes: *Einführung in die mathematische Logik* [sorgfältig geschriebene, detailgenaue Einführung für Studierende der Mathematik]

S. Hedman: *A First Course in Logic* [aktuelles einführendes Lehrwerk in viele wichtige Teilgebiete der Logik (u.a. Modelltheorie, Berechenbarkeit), sehr klar geschrieben, für Studierende der Mathematik]

Wer mehr über die Geschichte der Logik erfahren möchte, sei auf das Büchlein von H. Scholz: *Abriß der Geschichte der Logik* (München, 1959) sowie das ausführlichere Werk von W. und M. Kneale: *The Development of Logics* (Oxford, 1962) verwiesen. Eine Darstellung der Logikgeschichte in Quellen (bis Gödel) liefert J. M. Bochenski: *Formale Logik* (Freiburg/München 1956^1, 1962). Vgl. auch die kommentierte Quellen-Auswahl zur Geschichte der modernen Logik von K. Berka und L. Kreiser: *Logik-Texte*. Akademie-Verlag, Berlin 1971.

■ Vorbereitende Betrachtungen über die Sprache der Logik

Die Logik stellt dem wissenschaftlich Arbeitenden vor allem zwei Instrumente zur Verfügung: a) eine Sprache, die sich zur Bezeichnung von Dingen und zur Beschreibung von Sachverhalten eignet, und b) einen Vorrat von Methoden, mit denen sich Argumentationen oder Aussagen analysieren, auf ihre Richtigkeit prüfen bzw. beweisen lassen.
Im Folgenden sollen einige vorbereitende Betrachtungen über die logische Sprache angestellt werden.

■ Sprache und Welt ("Universe of Discourse")

Logische Gesetze, so hatten wir schon mit Aristoteles gesehen, gelten kraft ihrer Form und unabhängig von irgendwelchen Tatsachen (Fakten) hier oder an einem beliebigen Ort sowie jetzt und zu einer beliebigen Zeit, kurzum: sie sind allgemeingültig. Leibniz hat das mit der Wendung umschrieben, logische Wahrheiten besäßen *Gültigkeit in allen möglichen Welten*. (Wir werden später sehen, wie nahe er damit der heute geläufigen Definition gekommen ist.) Natürlich fragt man sich sofort, was hier unter "Welt" zu verstehen sei und welche anderen "Welten" als die eine, in der wir leben, dazu in Frage kommen.

Ludwig Wittgenstein - eine Kultfigur der modernen Philosophie - hat in seinem berühmten Frühwerk *Tractatus logico-philosophicus* (1921) als Satz Nr. 1 formuliert:

> *Die Welt ist alles, was der Fall ist.*

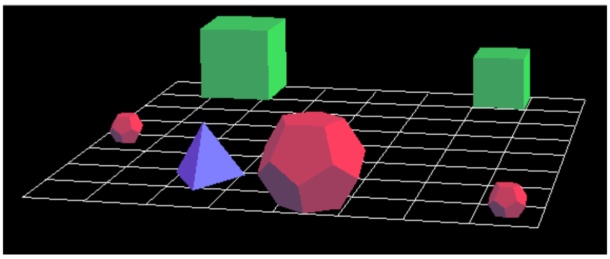
Aber was ist der Fall? Ein mögliche Antwort lautet: die Gesamtheit aller Tatbestände, d.h. bestehenden Beziehungen zwischen Dingen (Objekten). Fragen wir weiter, was einen Tatbestand - wir wollen im Folgenden auch von Sachverhalt sprechen - eigentlich ausmacht, so verweist uns Wittgenstein auf die Sprache. Ein Sachverhalt gehört nach Wittgenstein zur Welt, wenn er sich sprachlich ausdrücken lässt. Der *Tractatus* endet folgerichtig mit dem scheinbar nichtssagenden Satz Nr. 7:

> *Wovon man nicht reden kann, darüber muß man schweigen.*

Das angedeutete Verhältnis von "Welt" und "Sprache" enthält einen brauchbaren Kern: Sachverhalte der (oder einer) Welt werden durch sprachliche Ausdrücke beschrieben. Ist umgekehrt eine Sprache ***L*** verfügbar, so definieren wir als die zugehörige ***L**-Welt* genau die Gesamtheit der Sachverhalte, die sich mittels ***L*** ausdrücken lassen. Die Menge ***U*** der Dinge (Objekte) samt der ihr innewohnenden Struktur (Operationen, Relationen) dient dabei als sogenanntes *Universe of Discourse* (Ding- oder Gegenstandsbereich) von ***L***.

Die Mathematik eignet sich besonders gut zur Illustration dieses Sprache-Welt-Verhältnisses. Nehmen wir als Beispiel die Geometrie. Dort reden wir über Punkte, Geraden, Ebenen und bestimmte Beziehungen zwischen ihnen (z.B. Parallelität, Senkrechtstehen); diese bilden das "Universe of Discourse". Mit den verfügbaren Sprachmitteln lassen sich geometrische Sachverhalte beschreiben, etwa: Sind a, b, c Geraden und stehen a und b beide senkrecht auf c, so sind a und b parallel. Es könnte sich hierbei um ein Axiom (einen angenommenen Sachverhalt) oder um einen Lehrsatz (einen aus den Axiomen gefolgerten Sachverhalt) handeln. Das Ganze lässt sich mit wenigen Strichen auf dem Papier veranschaulichen. Doch: Der eigentliche Inhalt der Aussage ist nicht unmittelbar zugänglich oder greifbar. Einzig die sprachliche Beschreibung liefert den Maßstab für das Gemeinte. Auf dem Papier sehen wir schwärzliche Striche auf weißlichem Grund. Aber die Farben gehören nicht zur Welt der Geometrie; sie sind keine Eigenschaften von Punkten oder Geraden, und die geometrische Sprache enthält auch keine entsprechenden Farb-Prädikate. Grundsätzlich gilt: Was sich nicht in der Sprache der Geometrie ausdrücken lässt, kommt auch nicht als möglicher Sachverhalt in Frage.

Ein hübsches Beispiel ist die von Barwise und Etchemendy zu Lernzwecken erdachte Mikrowelt TW: *Tarski's World*. Ihr "Universe of Discourse" ***U*** besteht aus Tetraedern, Würfeln und Dodekaedern in drei Größen (klein, mittel, groß). Die zugehörige Sprache ***L*** gibt dies durch die Prädikate *Tet*, *Cube*, *Dodec* sowie *Small*, *Medium* und *Large* wieder. Ferner gibt es Mittel, um auszudrücken, dass ein Körper kleiner (größer) als ein anderer ist.



Die Körper nehmen Positionen in einem quadratischen 8×8-Raster ein, wodurch auf natürliche Weise bestimmte Lage-Beziehungen hergestellt werden. Zum Beispiel kann ein Körper vor oder hinter einem anderen stehen, links oder rechts von ihm, oder zwischen zwei anderen. Die Sprache bietet auch dazu die passenden Beschreibungsmittel. Allerdings nicht mehr. So lässt sich z.B. nichts über Farbe oder Volumen aussagen, obwohl die Körper im Software-Modell (s. Figur) eine bestimmte Farbe und bestimmte Volumina besitzen. Das bedeutet aber nur, dass solche Sachverhalte zu Tarski's Welt eben nicht gehören.

■ **Notwendigkeit einer künstlichen Sprache**

Halten wir fest: In der Sprache werden Sachverhalte der bzw. einer Welt ausgedrückt. Dies geschieht in grammatikalisch korrekt gebildeten Sätzen (oder in der hier bevorzugten Sprechweise: *Aussagen*). Die gewöhnliche Umgangssprache leistet dies, allerdings oft nicht in einer Form, die den Aufgaben der Logik (siehe 1.1) angemessen ist.

Einerseits wird umgangssprachlich häufig etwas betont (z.B. durch Entgegensetzung), was vom logischen Standpunkt aus irrelevant erscheint. So besagt die Wendung

Die Zahl 2 ist gerade, aber prim

sachlich nicht anderes als: *2 ist eine gerade Zahl <u>und</u> 2 ist Primzahl*. Dennoch enthält die erste Aussage mehr, nämlich einen Hinweis an den Adressaten, den der Sprecher davon abhalten will, alle Primzahlen für ungerade zu halten.

Andererseits ist die "naturbelassene" Sprache nicht immer eindeutig genug. Gibt es Körper in der in Abschnitt "Sprache und Welt" abgebildeten Tarski-Welt-Konstellation, die zwischen zwei anderen stehen? Ohne eine exakte Festlegung der Zwischen-Relation kommt man in dieser Frage nicht wirklich weiter. Oder: Wissen Sie immer zuverlässig zu sagen, wann ein Trinkgefäß noch als Tasse oder schon als Becher zu bezeichnen ist? Schließlich: An der Eintrittskasse des Tierparks verkündet ein Schild: *Rentner und Schüler zahlen die Hälfte*. Bedeutet es etwas anderes, wenn das Wort *und* durch *oder* ersetzt würde? Die Antwort lautet: Nein! Es handelt sich übrigens um eine linguistische (keine logische) Paradoxie.

Eine für logische Zwecke maßgeschneiderte Sprache sollte Vagheiten, Mehrdeutigkeiten und Paradoxien vermeiden. Es liegt daher nahe, eine geeignete künstliche (formale) Sprache zu verwenden. In künstlichen Formal-Sprachen gibt es meist einen kleinen Wortschatz (der später, je nach Bedarf, erweitert werden kann) und eine im allgemeinen kleine Anzahl einfacher Regeln, die festlegen, wie sich in der Sprache korrekte Ausdrücke bilden lassen.

■ **Vorblick auf die Sprachfamilie PL1**

Zu den größten Bewährungsproben der modernen Logik (seit Frege, Peano und Russell/Whitehead) gehörte das Unternehmen, die Mathematik oder zumindest relevante Teile von ihr zu formalisieren. Damit sollte ein völlig explizites System entstehen, das seinerseits metatheoretischen Untersuchungen unterworfen werden konnte. Die Aufgabe gliedert sich in zwei Stränge:

(1) Übersetzung der mathematischen Aussagen in die Sprache der Logik
(2) Etablierung eines vollständigen Systems effektiver formaler Beweisregeln

Dass dieses Unternehmen am Ende zu einer Erfolgsgeschichte wurde, ist nicht zuletzt der Wahl der "richtigen" Sprache zu verdanken. Genau genommen handelt es sich nicht um eine bestimmte Einzelsprache, sondern um eine Familie verwandter Sprachen, die hier zum Einsatz kommt:

PL1 (Sprache der) *Prädikatenlogik erster Stufe*, in der englischen Bezeichnung :
FOL (Language of) *First-Order Logic*

Hin und wieder, vor allem in der Fachliteratur älteren Datums, trifft man auch auf andere Bezeichnungen wie "Elementare Logik", "Quantorenlogik" oder – heute ganz ungebräuchlich – "Funktionenkalkül".

Bevor wir uns Gedanken über die in **PL1/FOL** erforderlichen Sprachmittel machen, hier zunächst einige Anmerkungen zu den beiden Teilaufgaben der Formalisierung.

Zu (1): Mathematische Aussagen werden gewöhnlich gebietsspezifisch formuliert, also z.B. in der Geometrie mit deren besonderen Objektsorten und Relationen, ebenso in der Arithmetik oder in der Mengenlehre. Will man somit eines dieser Gebiete in **PL1** formalisieren, braucht man a) allgemeine, d.h. gebietsunabhängige Sprachmittel zur Darstellung der logischen Verhältnisse, und b) einen Vorrat von Symbolen, welche sich auf die Besonderheiten des Fachgebiets beziehen. In der Arithmetik benötigt man z.B. Symbole für die Addition und Multiplikation, die wiederum in der Geometrie keine Rolle spielen; dort benötigt man aber ein Symbol, das die Inzidenz von Punkt und Gerade ausdrückt, usw. Kurzum: Die Ausprägungen von **PL1** unterscheiden sich durch die jeweils besonderen Sprachmittel eines Gebiets, besitzen aber als gemeinsamen Kern die universellen Sprachmittel der Abteilung a).

Zu (2): Die volle Bedeutung dieser Teilaufgabe erschließt sich erst bei fortschreitendem Studium der Logik. Gleichwohl sollte man sich schon jetzt eine ungefähre Vorstellung von ihr machen. Bekanntlich bringen Mathematiker die von ihnen gefundenen Sachverhalte in eine logische Ordnung, d.h. man folgert einen bestimmten Lehrsatz aus anderen (bereits als gesichert geltenden) Aussagen und stellt auf diese Weise ein Geflecht logischer Abhängigkeiten her. Bei der Aufgabe (2) handelt es sich, grob gesagt, darum, diese Folgerungsbeziehung in gewissem Sinn zu "mechanisieren". Dass eine Aussage *A* aus anderen Aussagen *B*, *C*, etc. folgt, läuft nach dieser Auffassung darauf hinaus, von *B*, *C*, etc. ausgehend durch Anwendung formaler Ableitungsregeln schließlich *A* – gleichsam "rechnerisch" – zu gewinnen. Ein solcher Beweiskalkül heißt *vollständig*, wenn er im Prinzip alle logischen Folgerungen abzuleiten gestattet. Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts war sichergestellt, dass es solche Kalküle überhaupt gibt. Ihre Beschreibung benutzt **PL1**, was die heute übliche Bezeichnung *Prädikatenkalkül* (1. Stufe) erklärt.

Abschließend wollen wir uns eine erste Vorstellung davon verschaffen, welche Arten von Ausdrücken in **PL1** gebildet werden und welche Sprachmittel dazu erforderlich sind.

Um auf einfache Weise Beispiele bilden zu können, werde vorab eine Menge ***U*** als "Universe of Discourse" vereinbart. Wir nehmen an, Maria und Peter seien zwei bestimmte, d.h. eindeutig benannte Personen; sie und ihre sämtlichen Vor- und Nachfahren sind die Mitglieder von ***U***.

Nun zum schrittweisen Aufbau einer Sprache vom **PL1**-Typ. Wir benötigen zwei Arten von Ausdrücken:

1. Ausdrücke, die Dinge aus ***U*** in eindeutiger Weise bezeichnen
2. Ausdrücke, die in ***U*** gültige Sachverhalte in eindeutiger Weise beschreiben

Zu 1. Ausdrücke dieses Typs heißen *Terme*. Natürlich sind die Namen *Maria* und *Peter* Terme. Da die übrigen Mitglieder von ***U*** namentlich nicht bekannt sind, können wir nur indirekt auf sie Bezug nehmen, etwa indem wir sie *Vater von Maria* oder *Mutter von Peter* usw. nennen. In **PL1** notiert man dies etwas formaler, aber sofort verständlich, so: *vater*(*Maria*) bzw. *mutter*(*Peter*). Auch hierbei handelt es sich um Terme, die jeweils ein Objekt des Universums ***U*** eindeutig bezeichnen. Mit dieser einfachen Bezeichnungstechnik lassen sich nun mühelos die Großeltern, Urgroßeltern usf. von Maria und Peter aufschreiben:

vater(*vater*(*Maria*))
mutter(*vater*(*Maria*))
vater(*vater*(*vater*(*Maria*)))
usw.

vater( ) und *mutter*( ) sind übrigens 1-stellige Funktionen auf ***U***, ganz so wie *sin*( ) und *cos*( ) Funktionen auf der Menge der reellen Zahlen sind. Die Termbildung geschieht demnach durch fortgesetzte Anwendung von Funktionssymbolen auf bereits gebildete Terme.
Die bisher betrachteten Terme sind sämtlich konstante Terme. In **PL1** werden darüberhinaus auch Variablen x, y, z, ... verwendet, die sich auf die Elemente von ***U*** beziehen. Der Term *mutter*(x) bezeichnet zwar keine

konkrete zu ***U*** gehörige Person, tut dies aber sehr wohl, sobald der Platzhalter *x* durch einen konstanten Term ersetzt wird. Auch eine einzelne Variable, z.B. *y*, ist ein Term.

Zu 2. Ausdrücke dieses Typs heißen *Formeln*. Um einen Sachverhalt durch eine Formel beschreiben zu können, brauchen wir einen oder mehrere Begriffe, die eine Beziehung ausdrücken. Hier wollen wir einmal die Eigenschaften, Mann bzw. Frau zu sein, als 1-stellige Relationen *Mann* bzw. *Frau* einführen. Damit können wir z.B. aufschreiben, dass Maria eine Frau ist: *Frau*(*Maria*).
Beachten Sie, dass diese Notation sich trotz ähnlichen Aussehens grundlegend von der des Terms *mutter*(-*Maria*) unterscheidet! *mutter* haben wir nämlich als Funktionssymbol mit dem Sinn "Mutter von ..." eingeführt, so dass *mutter*(*Maria*) nicht etwa den Sachverhalt beschreibt, dass Maria Mutter ist, sondern die eindeutig bestimmte Person "Mutter von Maria" bezeichnet. Dagegen wird durch die Formel *Frau*(*Maria*) kein Objekt bezeichnet (welches denn auch?), sondern der Sachverhalt beschrieben, dass Maria eine Frau ist. Wodurch ist es möglich, werden Sie mit Recht fragen, diese beiden Lesarten auseinander zu halten? Die Antwort ist einfach und lautet: Man muss wissen, dass *mutter* ein Funktionssymbol und *Frau* ein Relationssymbol ist. Bei der Definition einer **PL1**-Sprache ist dies also stets sorgfältig zu vermerken (und, wie hier, orthografisch zu unterscheiden).

Um die Angelegenheit ein wenig interessanter zu gestalten, soll noch ein 2-stelliges Prädikat (Relationszeichen) eingeführt werden, mit dem wir ausdrücken können, dass eine Person *x* jünger ist als eine Person *y*: *Jünger*(*x*, *y*).

Eine besondere Rolle spielt in der Logik zudem die Gleichheit (=), die wir hier (als 2-stellige Relation) zum allgemein-logischen Sprachvorrat zählen.

Welche Sachverhalte lassen sich mit den bisher eingeführten Sprachmitteln beschreiben? Betrachten wir Beispiele:

"Maria ist die Mutter von Peter": *Maria* = *mutter*(*Peter*)

"Peter ist jünger als der Vater des Vaters von Maria": *Jünger*(*Peter*, *vater*(*vater*(*Maria*)))

Das zweite Beispiel verrät schon den Zugewinn an Präzision, den die logische Sprache gegenüber der Umgangssprache erzielt. In der Alltagsrede würde man nämlich einfach sagen "Peter ist jünger als der Großvater von Maria". Streng genommen ist dieser Satz aber unklar, denn Maria hat ja - hoffentlich - zwei Großväter. In der Tat ist es auch nicht möglich, in **PL1** einen Term mit der Bedeutung "<u>der</u> Großvater von Peter" zu bilden!
Um auszudrücken, dass Peter jünger als die Großväter von Maria ist, müssen wir die beiden zugehörigen Formeln durch die logische Partikel *und* (∧) verbinden:

Jünger(*Peter*, *vater*(*vater*(*Maria*))) ∧ *Jünger*(*Peter*, *vater*(*mutter*(*Maria*)))

Mit Hilfe logischer Partikeln werden somit aus gegebenen Formeln neue (komplexe) Formeln zusammengesetzt. Dabei spielen nicht nur Verbindungen durch *und*, *oder*, *wenn ... dann ...* eine Rolle, sondern auch sog. Quantifizierungen, das sind Zusätze, die angeben, dass eine bestimmte Formel *für alle* bzw. *für einige* Objekte aus ***U*** zutrifft. Man spricht im ersten Fall von einer *Generalisierung*, im zweiten Fall von einer *Partikularisierung*. Quantifizierungen kommen bereits in den aristotelischen Syllogismen vor (zur Erinnerung: Alle *P* sind *Q*, alle *Q* sind ... usw.). Sie erweitern das Ausdruckvermögen von **PL1** beträchtlich.

Wie können wir ausdrücken, dass Maria Mutter ist? Nehmen wir an, ein Kind Marias hat den Namen *Isolde*. Dann drückt die Gleichung *Maria* = *mutter*(*Isolde*) diesen Sachverhalt aus. Was aber tun, wenn die Namen von Marias Kindern unbekannt sind? In diesem Fall helfen Variablen weiter. Wir schreiben: *Maria* = *mutter*(*x*), was besagt, dass Maria Mutter von *x* ist. Den Platzhalter *x* können wir, mangels Kenntnis eines

Namens, zwar nicht durch einen konstanten Term ersetzen; doch ist das nicht schlimm, weil ja nur ausgedrückt werden muss, dass Maria Mutter einer Person ist, was heißt: Es gibt eine Person, deren Mutter Maria ist. Die logische Partikel *es gibt ein* wird in **PL1** durch das Existenzsymbol ∃ wiedergegeben. Damit lautet die gesuchte Formel:

$$\exists x\, Maria = mutter(x)$$

Mit den logischen Partikeln ∧ und ∃ lässt sich nun z.B. auch beschreiben, dass Maria eine Tochter hat:

$$\exists x\, (Frau(x) \wedge Maria = mutter(x))$$

Beachten Sie: $\exists x$ liest sich zwar "es gibt ein x", doch bedeutet dies keineswegs, dass nur ein x existiert. Die angemessene Interpretation ist demnach: "es existiert mindestens ein x".

An dieser Stelle soll noch kurz erläutert werden, was es mit dem Zusatz "erster Stufe" in der Bezeichnung von **PL1** auf sich hat. In unserem Beispiel, aber auch generell, beziehen sich die Quantifizierungen in **PL1** stets auf Variablen x, y, z, ..., die Platzhalter für Objekte aus ***U*** (dem jeweiligen "Universe of Discourse") sind. Genau das bedeutet 1. Stufe. In einer Logik der 2. Stufe wäre es darüberhinaus erlaubt, sich auch auf Teilmengen von ***U*** zu beziehen. Damit ließe sich z.B. die Wendung "Es gibt eine Menge ***X*** von Objekten aus ***U*** derart, dass ..." wiedergeben. In der Logik der 1. Stufe ist das nicht möglich.

Soviel möge hier genügen, um einen ersten Eindruck davon zu bekommen, wie **PL1** als Sprache der Logik funktioniert. In den folgenden Kapiteln wird der Aufbau, d.h. Syntax und Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe systematisch durchgeführt. Die Wirkungsweise von **PL1** wird dabei stets an Beispielen aus der Umgangssprache, aus *Tarski's World* und der elementaren Mathematik illustriert.

Strukturen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Begriff der *Struktur*. Strukturierte Gebilde, wie Strukturen auch genannt werden, entsprechen im mathematischen Sinne dem Konzept einer "Welt" bzw. eines "Universe of Discourse".
Zunächst werden einige mehr oder weniger bekannte Beispiele von Strukturen vorgestellt. Daran schließen sich Definition und Erläuterung des allgemeinen Begriffs an. Die weiteren Beispiele dienen dann der Anwendung des Begriffs und sollen zusätzliches Material für spätere Übungen und Überlegungen abgeben. Besondere Beachtung verdient *Tarski's World*.

■ Einführende Beispiele

■ Standard-Arithmetik

Die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... sind jedermann vertraute Objekte. Man kann sich die (unendliche) Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen dadurch entstanden denken, dass - wie beim Zählen - ausgehend von 0 wiederholt zum unmittelbaren Nachfolger übergegangen wird, also: 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, usw. Außer der 1-stelligen Nachfolgerfunktion s sind noch Addition "+" und Multiplikation "·" (beide 2-stellige Operationen) von Interesse.

Damit bilden wir die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s, +, \cdot, 0)$. Sie besteht demnach aus einer *Trägermenge* (hier: $\mathbb{N}$), den auf ihr definierten Funktionen (hier: s, $+$, $\cdot$), sowie einem namentlich ausgezeichneten Element (hier: 0).

Um ein strukturiertes Gebilde näher zu kennzeichnen, fordert man meist gewisse Eigenschaften in Form von *Axiomen*. Axiome sind Aussagen (oder Formeln), die in den Beweisen anderer Aussagen als gültig angenommen werden dürfen.

Für die Struktur $\mathcal{N}$, hier auch *Standard-Arithmetik* oder kurz: *Arithmetik* genannt, lassen sich folgende Axiome aufstellen:

(N1) Für alle x: $s(x) \neq 0$
(N2) Für alle x, y: Wenn $s(x) = s(y)$, dann $x = y$
(N3) Für alle x: $x + 0 = x$
(N4) Für alle x, y: $x + s(y) = s(x + y)$
(N5) Für alle x: $x \cdot 0 = 0$
(N6) Für alle x, y: $x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$

Axiom (N1) sorgt dafür, dass 0 niemals Nachfolger einer Zahl ist und so eine zyklische Zählreihe herauskommt. (N2) fordert die Injektivität der Nachfolgerfunktion, verschiedene Zahlen haben also nie denselben Nachfolger. (N3) und (N5) regeln das Verhalten von 0 bei Addition und Multiplikation. (N4) und (N6) sind spezialisierte Fassungen des Assoziativgesetzes der Addition bzw. des Distributivgesetzes.

Intuitiv versteht man die Nachfolgerbildung als gleichbedeutend mit der Addition von 1. Tatsächlich lässt sich leicht bestätigen:

Für alle x: $s(x) = x + s(0)$

Beweis: Setze $y = 0$ in (N4), benutze (N3) und vertausche die Seiten der Gleichung.

Anmerkung

Andere Lehrsätze der Arithmetik, z.B. die Assoziativ- und Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation, sind weniger einfach herzuleiten. Man benötigt dazu im übrigen das Induktionsprinzip, das somit noch als zusätzliches 7. Axiom formuliert werden muss.

Bei der Anwendung der sog. vollständigen Induktion wird eine Zahlenmenge V betrachtet und gezeigt: $0 \in V$ (Induktionsvoraussetzung) und $s(x) \in V$ für alle $x \in V$ (Induktionsschluss). Das Induktionsprinzip liefert dann: $V = \mathbb{N}$. Offenbar wird in diesem Verfahren Bezug auf eine <u>Teilmenge</u> V von $\mathbb{N}$ genommen. Es ist also nicht (jedenfalls nicht ohne wesentliche Abstriche) möglich, ein Induktionsaxiom mit Sprachmitteln der ersten Stufe zu formulieren. Die folgende Formulierung ist ersichtlich 2. Stufe:

(N7)* Für alle $V \subseteq \mathbb{N}$: Wenn $0 \in V$ und für alle $x \in V$: $s(x) \in V$, dann $V = \mathbb{N}$.

Als Beispiel soll hier einmal das Assoziativgesetz der Addition aus den Axiomen gefolgert werden:

Für alle x, y, z: $x + (y + z) = (x + y) + z$

Beweisskizze: Wir machen Gebrauch von (N7)* in Form einer Induktion nach z, wählen also V als Menge aller $z \in \mathbb{N}$, für die gilt: $x + (y + z) = (x + y) + z$. Zunächst zeigt man $0 \in V$(mehrfache Anwendung von (N3)). Sei nun $z \in V$. Wir zeigen: $s(z) \in V$. In der Tat ergibt sich bei Auswertung der linken Seite nach Axiom (N4): $x + (y + s(z)) = x + s(y + z) = s(x + (y + z))$. Analog lässt sich die rechte Seite der Gleichung auswerten: $(x + y) + s(z) = s((x + y) + z)$. Im Argument der Nachfolgerfunktion ist nun lediglich noch die Induktionsvoraussetzung $z \in V$ ins Spiel zu bringen.

■ Gruppen

Eine Gruppe besteht aus einer Menge G, in der ein Element e ausgezeichnet ist, und einer 2-stelligen Verknüpfung (Operation, Funktion) $\circ : G \times G \to G$, die folgende Axiome erfüllt:

(G1) Für alle $x, y, z : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
(G2) Für alle $x : x \circ e = x$
(G3) Für alle x gibt es ein $y : x \circ y = e$

Als Struktur schreiben wir eine Gruppe demnach: $\mathcal{G} = (G, \circ, e)$. Wegen (G2) heißt e *Einselement* oder *neutrales Element* von G.

Während die Standard-Arithmetik $\boldsymbol{N}$ darauf abzielt, einen ganz bestimmten Gegenstandsbereich (die natürlichen Zahlen mit ihren gewöhnlichen Operationen) möglichst eindeutig abzubilden, ist die Gruppenstruktur von vornherein und mit Absicht so angelegt, dass es unabsehbar viele Möglichkeiten gibt, eine konkrete Gruppe zu realisieren. Aus diesem Grunde nennt man das System der Axiome (G1), (G2), (G3) *polymorph* (gr. wörtlich: vielgestaltig).

Beispiele von Gruppen:

$(\mathbb{Z}, +, 0)$, die additive Gruppe der ganzen Zahlen mit 0 als neutralem Element
$(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, die multiplikative Gruppe der ganzzahligen Reste modulo 5 mit 1 als neutralem Element
$(\boldsymbol{S}_n, \circ, \mathrm{id})$, die Gruppe der Permutationen n-ten Grades (sog. symmetrische Gruppe) mit der identischen Permutation id als neutralem Element

Der allgemeine Begriff der Gruppe ist ein abstrakter Rahmen, der alle speziellen (konkreten) Gruppen umfasst. Der Vorteil einer solchen Abstraktion liegt auf der Hand. Lässt sich ein bestimmter Sachverhalt aus den drei Gruppenaxiomen logisch folgern, so gilt er automatisch *in allen Gruppen*. Zum Beispiel kann man zeigen, dass das y in (G3) zu gegebenem x eindeutig bestimmt ist und ferner gilt: $y \circ x = e$. Es ist üblich, dieses sog. *Inverse* von x mit x^{-1} zu bezeichnen. Eine weitere Folgerung aus den Gruppenaxiomen ist die Umkehrregel der Inversenbildung:

Für alle $x, y : (x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$

Beweis: als Übung.

Damit erhält man auf einen Schlag eine Umkehrregel in allen Gruppen. Es ist also nicht nötig, diesen Sachverhalt in jedem Einzelfall neu zu beweisen. Er gilt für Restklassengruppen ebenso wie für Abbildungsgruppen (etwa die Kongruenzgruppe der euklidischen Geometrie).

Anmerkung

Die Standard-Arithmetik soll, anders als der Gruppenbegriff, "das Gemeinte" (zumindest bis auf Isomorphie) eindeutig erfassen. Es zeigt sich jedoch, dass dies nicht gelingt, wenn man sich auf die Logik der ersten Stufe beschränkt. In diesem Fall gibt es nämlich Strukturen, die sämtliche Axiome erfüllen und dennoch nicht zur Standard-Arithmetik isomorph sind. Der (hier nicht zu erbringende) Nachweis solcher Nichtstandard-Arithmetiken benutzt eine fundamentale Eigenschaft des Begriffs der logischen Folgerung. Das Induktionsaxiom (N7)* ist dabei natürlich durch eine (schwächere) Fassung (N7) 1. Stufe zu ersetzen.
Andererseits lässt sich, auf der Basis der Logik zweiter Stufe, folgender *Isomorphiesatz* beweisen: Eine Struktur $\boldsymbol{N}^*$, die sämtliche Axiome (N1)-(N6) und (N7)* erfüllt, ist isomorph zur Standard-Arithmetik $\boldsymbol{N}$.

■ Äquivalenzstrukturen

Eine nichtleere Menge M zusammen mit einer 2-stelligen Relation R auf M nennt man *Äquivalenzstruktur*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(E1) Für alle x : $R(x, x)$
(E2) Für alle x, y : Wenn $R(x, y)$, dann $R(y, x)$
(E3) Für alle x, y, z : Wenn $R(x, y)$ und $R(y, z)$, dann $R(x, z)$

Wir notieren die Struktur: $\mathcal{E} = (M, R)$. Die Relation heißt üblicherweise *Äquivalenz-* oder *Gleichheitsrelation*. In der Tat geben die Formulierungen (E1) (Reflexivität), (E2) (Symmetrie) und (E3) (Transitivität) grundlegende Eigenschaften der gewöhnlichen Gleichheit (=) wieder.

Die hauptsächliche Bedeutung von Äquivalenzstrukturen liegt darin, dass sie Begriffsabstraktionen durch Klassenbildung ermöglichen. Sei z.B. M eine Menge von Personen, und es bedeute $R(x, y)$, dass x und y gleichaltrig sind. Dann ist R eine Äquivalenzrelation, die M in Altersklassen zerlegt, d.h. für irgend zwei Mitglieder x, y einer Altersklasse gilt $R(x, y)$, und umgekehrt. Die durch R gebildeten Klassen sind disjunkt; schließlich kann eine Person nicht zwei verschiedenen Altersklassen angehören. Die so vollzogene Abstraktion ist der Übergang von einer Person x zu ihrer Altersklasse $\tilde{x}$ (legitim, wenn man sich in einem bestimmten Zusammenhang - z.B. bei statistischen Untersuchungen - nur für die Jahrgänge einer Population interessiert).

In der Mathematik gibt es zahllose Anwendungsbeispiele dieser Art. So wird z.B. der Menge $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzstruktur aufgeprägt, indem man zu vorgegebenem $m > 1$ für zwei ganze Zahlen x und y definiert: $R(x, y)$ genau dann, wenn x und y bei Division durch m denselben Rest lassen. Mit den so entstehenden $m - 1$ Restklassen modulo m lässt sich sogar rechnen wie in $\mathbb{Z}$, weil R mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation in folgendem Sinn verträglich ist:

Wenn $R(x, x')$ und $R(y, y')$, dann $R(x + y, x' + y')$ und $R(x \cdot y, x' \cdot y')$

Beweis: als Übung.

■ Ordnungsstrukturen

Eine Ordnung oder Ordnungsstruktur $\mathcal{O} = (M, <)$ besteht aus einer nichtleeren Menge M und einer 2-stelligen Relation < auf M mit folgenden Eigenschaften:

(O1) Für alle x, y : Wenn $x < y$, dann nicht $y < x$
(O2) Für alle x, y, z : Wenn $x < y$ und $y < z$, dann $x < z$

Axiom (O2) fordert die Transitivität der betreffenden Relation und ist formal dasselbe wie (E3). (O1) drückt die Antisymmetrie von < aus. Beispiele von Ordnungsrelationen sind: das gewöhnliche "Kleiner-als" bei Zahlen, die Beziehung $x \subset y$ (strenge Inklusion) bei Mengen, die Relation "x ist echter Teiler von y" auf $\mathbb{Z}$.

Ordnungsstrukturen sind z.B. von Interesse, wenn sie mit algebraischen Operationen kombiniert werden. Meist kommen dann Axiome hinzu wie diese Forderung von Verträglichkeit mit der Addition:

Wenn $x < y$, dann $x + z < y + z$

■ Der allgemeine Strukturbegriff

■ Definition

Eine *Struktur* (ein *strukturiertes Gebilde* oder kurz: *Gebilde*) besteht aus einer nichtleeren Menge U sowie darauf definierten Relationen, Funktionen und Konstanten.

Relationen:	$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots$
Funktionen:	$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$
Konstanten:	$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots$

Für die Menge U werden unterschiedliche, aber gleichwertige Bezeichnungen verwendet: Individuenbereich, Dingbereich, Grundmenge, Trägermenge u. dgl. mehr. Im Folgenden soll bevorzugt vom *Individuenbereich* gesprochen werden. Für das zugehörige strukturierte Gebilde notieren wir $\mathcal{U} = (U;\ R_1,\ R_2\ \ldots,\ f_1,\ f_2 \ldots,\ c_1,\ c_2 \ldots)$. Schreibt man für die Folge der Strukturelemente zusammenfassend $\mathfrak{S}$, so erhalten wir die kürzere Notation $\mathcal{U} = (U,\ \mathfrak{S})$.

■ Erläuterungen

1) Der Individuenbereich darf nicht leer sein (eine leere "Welt" macht keinen Sinn).

2) Streng genommen würde es genügen, ausschließlich Relationen zu betrachten, da sich jede Funktion als spezielle Relation auffassen lässt. Konstanten wiederum können als 0-stellige Funktionen angesehen werden (kein Argument, ein Wert). Es ist aber bedeutend *sinnfälliger*, die aufgeführten drei Sorten von Strukturelementen immer explizit zu unterscheiden.

3) Jeder Relation und jeder Funktion ist eine *Stelligkeit* zugeordnet, das ist eine ganze Zahl $n \geq 0$, welche die Anzahl der erforderlichen Argumente angibt. Eine k-stellige Relation R ist eine Menge von k-Tupeln $(u_1,\ \ldots,\ u_k)$ mit u's aus dem Individuenbereich. Stehen $u_1,\ \ldots,\ u_k$ in der Relation R, d.h. $(u_1,\ \ldots,\ u_k) \in R$, so schreiben wir: $R(u_1,\ \ldots,\ u_k)$. Liefert eine k-stellige Funktion f zu den Argumenten $u_1,\ \ldots,\ u_k$ den Wert v, so schreiben wir wie üblich: $f(u_1,\ \ldots,\ u_k) = v$.

4) Eine 1-stellige Relation kann als Eigenschaft gedeutet werden. Beispiele von Eigenschaften auf $\mathbb{N}$: "gerade sein", "Primzahl sein", "Quadratzahl sein". Besonders häufig sind 2-stellige Relationen (vgl. Äquivalenz- und Ordnungsrelationen). Statt der Präfixnotation $R(x,\ y)$ wird dann gerne die Infixnotation benutzt ($x < y$). Zweistellige Funktionen haben oft den Sinn von Rechenoperationen und werden dann üblicherweise infix, d.h. zwischen die Operanden geschrieben: $a + b$, $a \cdot b$, usw.

5) Eine echte Struktur $(U,\ \mathfrak{S})$ liegt nur dann vor, wenn $\mathfrak{S}$ mindestens eine Relation oder Funktion enthält. Die zuvor behandelten Beispiele machen deutlich, dass nicht unbedingt mehrere oder unterschiedliche Arten von Strukturelementen vertreten sein müssen. Es genügt z.B. völlig, wenn auf dem Individuenbereich eine (einzige) zweistellige Relation gegeben ist. Entscheidend für das Anwendungspotential einer Struktur sind im übrigen die sie definierenden Axiome.

■ Weitere Beispiele

■ Affine Ebenen

Die nun zu definierende Struktur kann man sich fürs Erste als eine Ebene E vorstellen, die Punkte und Geraden enthält. Es wird die 2-stellige Relation I betrachtet, dass Punkt x auf Gerade y liegt: $x\, I\, y$, lies: x inzidiert mit y (x liegt auf y bzw. y geht durch x). Um die hieraus zu gewinnende Struktur *affine Ebene* $\mathcal{A} = (E; P, G, I)$ zu verstehen, sollte man zunächst an Punkte und Geraden der Schulgeometrie denken. Bei Bedarf kann man sich später davon wieder entfernen oder sogar lösen.

Um Punkte und Geraden in E unterscheiden zu können, wurden $\mathcal{A}$ die 1-stelligen Relationen (Eigenschaften) P bzw. G beigegeben. Natürlich gilt: $E = P \cup G$ und $P \cap G = \emptyset$. Damit lässt sich nun z.B. definieren, wann zwei Geraden u und v *parallel* ($u \parallel v$) sind:

$u = v$ oder u, v haben keinen Punkt gemeinsam (d.h. es gibt kein $x : P(x)$ und $x\, I\, u$ und $x\, I\, v$).

Die Axiome einer affinen Ebene sind folgende:

(A1) Durch zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade.
(A2) Zu jeder Geraden x und zu jedem Punkt y gibt es genau eine zu x parallele Gerade durch y.
(A3) Es gibt drei Punkte, die nicht alle auf derselben Geraden liegen.

Auf eine formelhafte Wiedergabe dieser Aussagen wird hier zunächst verzichtet (um später in den Übungen darauf zurückzukommen).

■ Verwandtschaften

Das in früher skizzierte Beispiel zu "Maria und Peter" soll nun systematisch unter den allgemeinen Strukturbegriff gefasst (und dabei etwas modifiziert und erweitert) werden. Das so gewonnene Gebilde $\mathcal{V} = (V, \mathfrak{S})$ möge *Verwandtschaft* heißen. Der Individuenbereich V ist eine (nichtleere) Menge von Personen, zu der <u>mindestens</u> die unter "Konstanten" aufgeführten (eindeutig benannten) Mitglieder zählen.
In $\mathfrak{S}$ befinden sich folgende Strukturelemente:

Relationen:	*Fr*, *Ma*, *Jn*, *Ep*
Funktionen:	*mu*, *va*
Konstanten:	*Maria*, *Peter*, *Isolde*, *Tristan*, *Carmen*, *Paul*

Alle Relationen werden präfix geschrieben. *Fr* und *Ma* sind 1-stellig und bezeichnen die Geschlechtszugehörigkeit "Frau" bzw. "Mann". Die Relationen *Jn* und *Ep* sind 2-stellig, und es bedeute $Jn(x, y)$: x ist jünger als y, sowie $Ep(x, y)$: x und y bilden ein Ehepaar. Die beiden Funktionen sind 1-stellig: $mu(x)$ bezeichnet die Mutter von x, $va(x)$ den Vater von x.

<u>Anmerkung:</u> Die soweit definierte simple Struktur dient logischen Übungszwecken und ist weder dazu gedacht noch geeignet, genealogische Verhältnisse in allen (insbesondere juristisch) relevanten Aspekten wiederzugeben.

Da es – natürlich – kein offizielles Axiomensystem für $\mathcal{V}$ gibt, steht es uns frei, mit dem Aufschreiben einiger Axiome zu beginnen. Diese hängen nicht nur von offenkundigen biologischen Gegebenheiten, sondern zu einem gewissen Teil auch von den Regeln ab, nach denen die Gesellschaft, zu der die Mitglieder von V gehören, funktioniert.

Es folgt eine mögliche Zusammenstellung mehr oder weniger plausibler Grundsätze:

(V1) Für alle x : Wenn $Fr(x)$, dann nicht $Ma(x)$
(V2) Für alle x : $Fr(mu(x))$
(V3) Für alle x : $Ma(va(x))$
(V4) Für alle x : $Jn(x,\ mu(x))$
(V5) Für alle x : $Jn(x,\ va(x))$
(V6) Für alle x, y : Wenn $Jn(x,\ y)$, dann nicht $Jn(y,\ x)$
(V7) Für alle x, y, z : Wenn $Jn(x,\ y)$ und $Jn(y,\ z)$, dann $Jn(x,\ z)$
(V8) Für alle x gibt es ein y : $y = mu(x)$
(V9) Für alle x gibt es ein y : $y = va(x)$
(V10) Für alle x : nicht $Ep(x,\ x)$
(V11) Für alle x, y : Wenn $Ep(x,\ y)$, dann $Ep(y,\ x)$
(V12) Für alle x, y : Wenn $Ep(x,\ y)$ und $Fr(x)$, dann $Ma(y)$
(V13) Für alle x, y: Wenn $Ep(x,\ y)$ und $Ep(x,\ z)$, dann $y = z$

Es fehlen in dieser Liste sicher noch einige Forderungen, z.B. diverse Inzestverbote. Wenn man will, lassen sich auch noch Namenskonventionen hinzunehmen, z.B. $Fr(Maria)$, $Ma(Peter)$, … oder Annahmen über die Beziehungen zwischen den namentlich bekannten Personen, etwa $Isolde = mu(Paul)$, $Jn(Peter,\ Paul)$ und dgl. mehr.

(V1)-(V5) betreffen biologische Gegebenheiten. (V6) und (V7) drücken aus, dass die Jünger-Relation eine Ordnung auf V darstellt. (V8) und (V9) besagen, dass jede Person einen Vater und eine Mutter hat; die Funktionen *mu* und *va* sind also auf ganz V definiert. Da Funktionen eindeutige Zuordnungen sind, gibt es jeweils auch nicht mehr als einen Vater oder eine Mutter. (V10) und (V11) sind einleuchtende Forderungen an die eheliche Partnerschaft. (V12) gilt hingegen nicht mehr als selbstverständlich. (V13) schließt Polygamie aus, ist also auch keine überall und zu allen Zeiten gültige Annahme.

- **Tarski's World**

Tarski's World $\mathcal{TW}$ ist, wie *Verwandtschaften*, eine zu Lernzwecken (von J. Barwise und J. Etchemendy) erfundene Mikrowelt. Sie ist endlich (sogar überschaubar klein), visualisierbar und interaktiv aufgrund einer Software-Simulation. $\mathcal{TW}$ ist noch keine spezielle Struktur, sondern ein allgemeiner Rahmen, in dem sich konkrete Welten definieren lassen.

Der Individuenbereich K von $\mathcal{TW}$ besteht aus drei Sorten von Körpern: Tetraedern, Würfeln und Dodekaedern in jeweils dreierlei Größen.

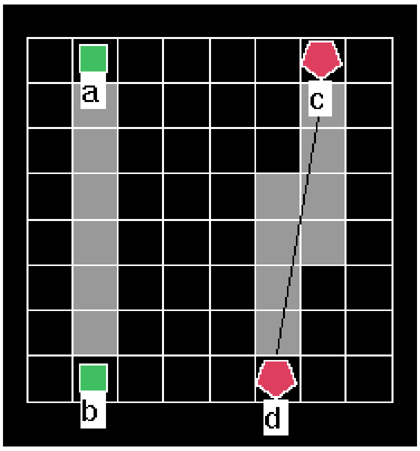
1-stellige Relationen:	*Tet*, *Cube*, *Dodec*, *Small*, *Medium*, *Large*
2-stellige Relationen:	*Smaller*, *Larger*, *BackOf*, *FrontOf*, *LeftOf*, *RightOf*
3-stellige Relation:	*Between*
Konstanten:	a, b, c, d, e, f

Zur leichteren Unterscheidung sind die verschiedenen Typen von Körpern durch je eine Farbe gekennzeichnet, die jedoch nicht zur Welt gehört. Ein Teil der Relationen hat eine räumliche Bedeutung und bezieht sich auf die Position in einem quadratisch aufgeteilten 8×8-Tableau. Ein Körper beansprucht dabei genau ein Feld.

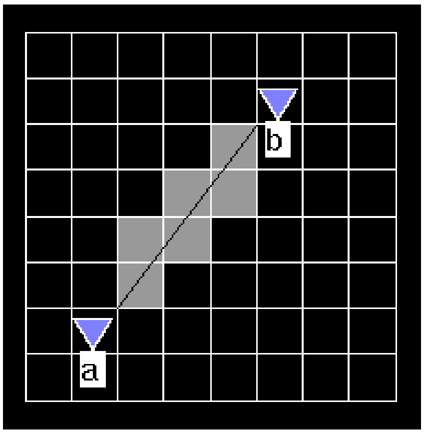
$Tet(x)$ bedeutet: x ist Tetraeder (blau); $Cube(x)$ bedeutet: x ist Würfel (grün); $Dodec(x)$ bedeutet: x ist Dodekaeder (rot); $Small(x)$ bedeutet: x ist klein; $Medium(x)$ bedeutet: x ist mittelgroß; $Large(x)$ bedeutet: x ist groß; $Smaller(x,\ y)$ bedeutet: x ist kleiner als y; $Larger(x,\ y)$ bedeutet: x ist größer als y; $BackOf(x,\ y)$ bedeutet: x befindet sich hinter y; $FrontOf(x,\ y)$ bedeutet: x befindet sich vor y; $LeftOf(x,\ y)$ bedeutet: x befindet sich links von y; $RightOf(x,\ y)$ bedeutet: x befindet sich rechts von y.

Between(x, y, z) bedeutet: x liegt zwischen y und z. Hier bedarf es einer eindeutigen Definition von "zwischen", da der Begriff anschaulich bzw. umgangssprachlich nur vage festgelegt ist. Es liegt in der Natur der Sache, dass eine exakte Definition eine gewisse Willkür mit sich bringt, und zwar zumeist da, wo der "natürliche" Begriff unscharf bleibt.
Zwei Fälle werden unterschieden:

Fall 1: Die Körper liegen in derselben Reihe, d.h. Zeile oder Spalte (hier: Würfel a und b) oder in benachbarten Reihen (Dodekaeder c und d). Dann verbinde man die Mittelpunkte der einander zugewandten Feldseiten. Alle Felder, die dabei mit der Verbindungsstrecke inzidieren (auch in Randpunkten!), liegen *zwischen* a und b bzw. c und d. Die Zwischenbereiche sind in der nachstehenden Figur grau gefärbt.



Fall 2: Die Körper (hier: Tetraeder a und b) liegen weder in derselben Reihe noch in benachbarten Reihen. Man verbinde die einander zugewandten Ecken der von a und b belegten Felder und verfahre wie in Fall 1.



Es gibt genau fünf Konstanten. Diese werden je nach Bedarf als Namen für Elemente aus K vergeben.

Da sämtliche Relationen durch anschauliche Verhältnisse bestimmt sind, kann man eigentlich darauf verzichten, sie noch einmal durch Axiome zu beschreiben. Zum Beispiel ist klar, dass ein $\mathcal{TW}$-Körper entweder ein Tetraeder oder ein Würfel oder ein Dodekaeder ist. Ebenso selbstverständlich definieren *Smaller* oder *LeftOf* jeweils eine Ordnungsstruktur auf K, und dgl. mehr. Es ist aber eine gute Übung für den Anfänger, solche Axiome aufzudecken und zu formulieren.