© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-03-27

# Allgemeines zum Modellbegriff

## Modellbegriff in Alltag und Wissenschaft

**Vorbilder / Muster**

(Modellversuch, Musterlösung, Bauplan, ...)

*Ausrichtung künftigen Handelns bzw. Entscheidens an Vorgaben oder Kriterien*

---

**Ähnliche physische Abbilder**

(Molekülmodelle, Modelleisenbahnen, Modelle des Sonnensystems, Landkarten, Stadtpläne, Wegskizzen, ...)

*Mittel der Anpassung an das menschliche Vorstellungsvermögen*

---

**Simulationen / Spiele**

(Plan- und Rollenspiele, Fahr- und Flugsimulatoren, virtuelle Architekturen, Wohnungsgrundriss mit Pappmöbeln, ...)

*Ersatzobjekt für "kostenlose" (folgenlose) Handlungen*

---

**Theorien als Modelle**

(Modell der Planetenbewegung, kinetische Gastheorie, Bohrsches Atommodell, Modell des Regenbogens, ...)

*Beschreibung und Erklärung von Naturphänomenen, Prognose*

## Die Modellbeziehung

Ein Modell ist stets Modell von etwas, d.h. wir haben es mit einer Modellbeziehung zwischen einem gegenständlichen Komplex $K$ (dem realen Urbild oder Original) und einem in gewissem Sinn ähnlichen Bild $K'$ von $K$ zu tun, das dann Modell genannt wird.

### ■ Anmerkungen

1. Was "ähnlich" bedeutet, hängt vom jeweiligen Zusammenhang ab. Ähnlich kann z.B. heißen: verkleinert, vergrößert, vereinfacht, verkörpert, veranschaulicht, in ein anderes Darstellungsmedium übertragen (z.B. bei der Visualisierung von numerischen Daten), u.a.m.

2. Modellierung bedeutet keinesfalls immer Veranschaulichung. Meist ist ja der Sachkomplex $K$ von sich aus physischer Natur und damit anschaulich gegeben und der Sinneswahrnehmung (zumindest teilweise) zugänglich. Dann kommt es vielmehr umgekehrt gerade darauf an, von den (häufig verwirrenden, unwesentlichen) Details einer Situation abzusehen und ein vereinfachtes Abbild $K'$ zu entwickeln. Typischerweise geht also die Modellbildung einher mit *Abstraktion*.

3. Die klassischen Naturwissenschaften sind vor allen Dingen an Erklärung und Prognose interessiert. Seit dem 17. Jahrhundert hat die Physik auf diesen Gebieten bis heute Enormes vollbracht. Die Theorien (abstrakten Modelle), die dabei entwickelt wurden, haben sich bekanntlich als ein überaus effektives Mittel der Naturbeherrschung erwiesen. Das gilt nicht nur für die Physik. Auch andere Wissenschaften suchen nach Modellen der physischen, sozialen und mentalen Wirklichkeit, um diese nicht nur zu erklären, sondern auch technologisch zu beherrschen.

# Problemlösen durch Modellbildung

In den meisten Fällen will man mit Modellen ein Problem lösen, das in einer realen Situation auftritt.

Der Vorgang lässt sich schematisch als ein (u.U. mehrfach zu durchlaufender) Zyklus beschreiben:

**1. Modellieren**

Der zum Problem gehörende Sachkomplex $K$ wird modelliert, d.h. durch ein mathematisches Modell $K'$ abgebildet (dargestellt).

**2. Deduzieren**

Das ursprüngliche Problem wird in die Modellebene übersetzt und innerhalb des Modells gelöst.

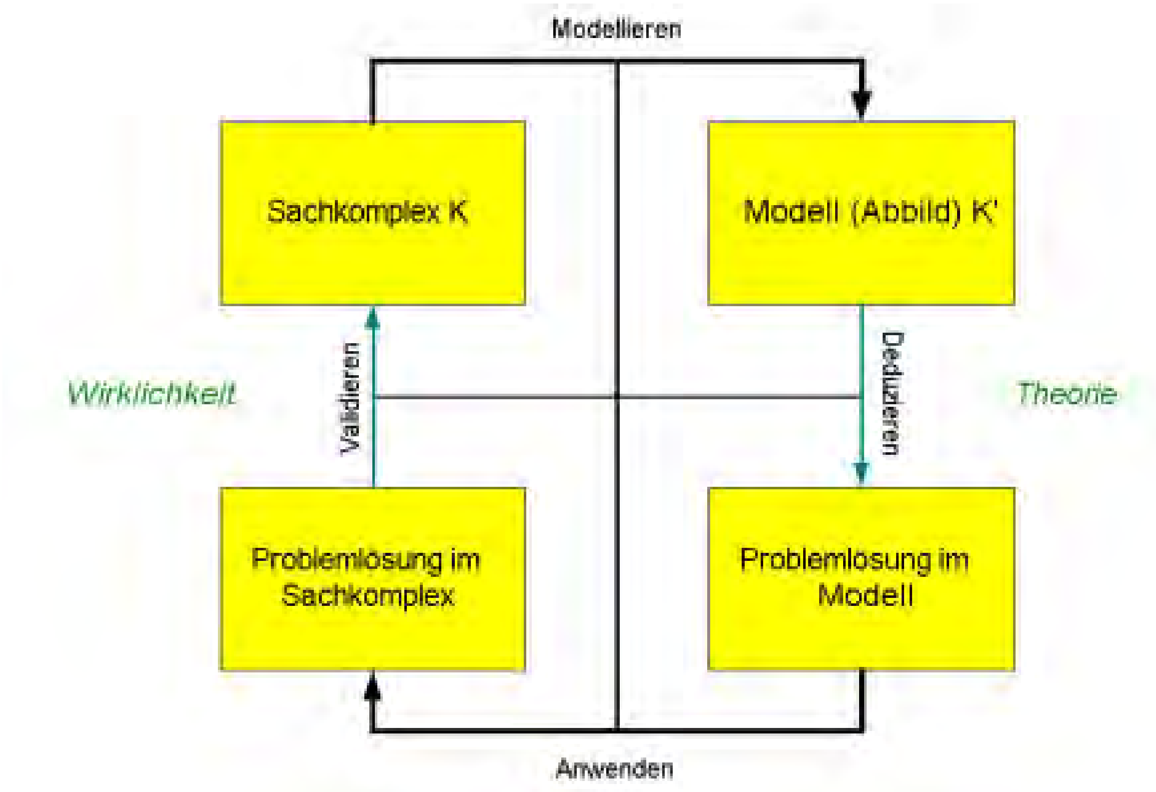
**3. Anwenden**

Die Modell-Lösung wird in die Wirklichkeitsebene, d.h. in den Sachzusammenhang zurückübertragen (Sachlösung).

**4. Validieren**

Die Sachlösung wird bewertet. (Je nach Ergebnis muss das Modell der veränderten Erkenntnislage angepasst, gelegentlich auch das Problem neu formuliert werden.)

## Modellierungsprozess als Zyklus



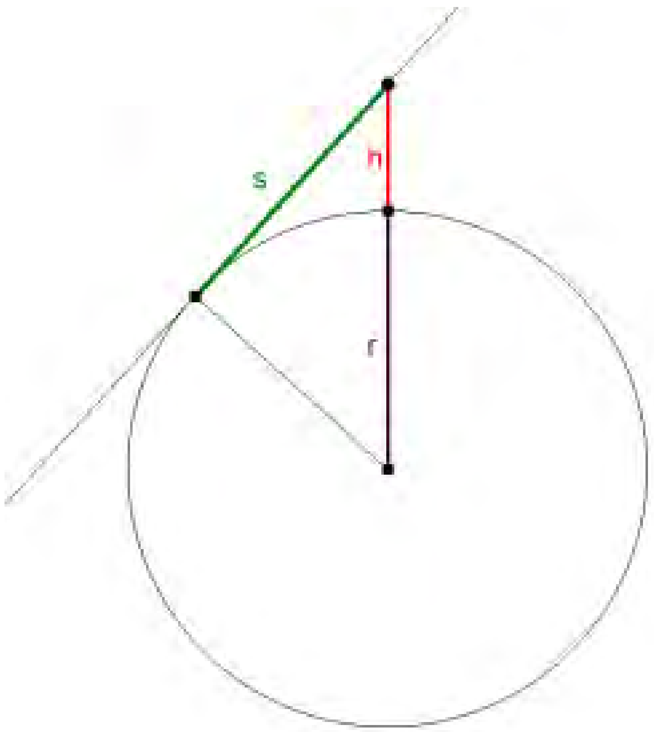
© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-03-28

# Sichtweite auf Gipfeln

## Planfigur (grafisches Modell)

Gegeben: Radius $r$ der Erde ($r \approx 6375\,\text{km}$), Höhe $h$ des Gipfels

Gesucht: (maximale) Sichtweite $s$




### ■ 1. Lösungsmöglichkeit: Messen

Abmessen der Strecke $s$ in einer maßstabgerechten Zeichnung (hier völlig unrealistisch!)

### ■ 2. Lösungsmöglichkeit: Rechnen

Es liegt ein rechtwinkliges Dreieck vor (Radius senkrecht auf dem tangentialen Sehstrahl).

Nach Pythagoras (algebraisches Modell):

$$s^2 + r^2 = (r + h)^2$$

Auflösung nach $s$:

$$s = \sqrt{2\, r\, h + h^2}$$

$$\boxed{s = \sqrt{12750\, h + h^2}}$$

## Diskussion (Validierung)

Welche Werte für $h$ sind realistisch?

| | |
|---|---|
| $h = 0.1$ bis $0.5$ km | Aussichtsturm auf einem Hügel |
| $h = 1$ bis $3$ km | Berggipfel in den Alpen |
| $h = 8.8$ km | höchste Erhebung (Mt. Everest) |

Vergleiche die beiden Summanden unter der Wurzel!

Der Summand $h^2$ ist gegenüber $12750\, h$ vernachlässigbar.

Näherungslösung ist der exakten Lösung überlegen:

$$\boxed{s \approx 113 \sqrt{h}}$$

### ■ Sichtweite als Funktion der Gipfelhöhe

Definitionen

```
SwExakt[h_] := Sqrt[12750 h + h^2];
SwApprox[h_] := 112.916 Sqrt[h];
```

Zwei (kaum unterscheidbare) Funktionsgraphen:

```
Plot[{SwExakt[h], SwApprox[h]}, {h, 0, 12}];
```

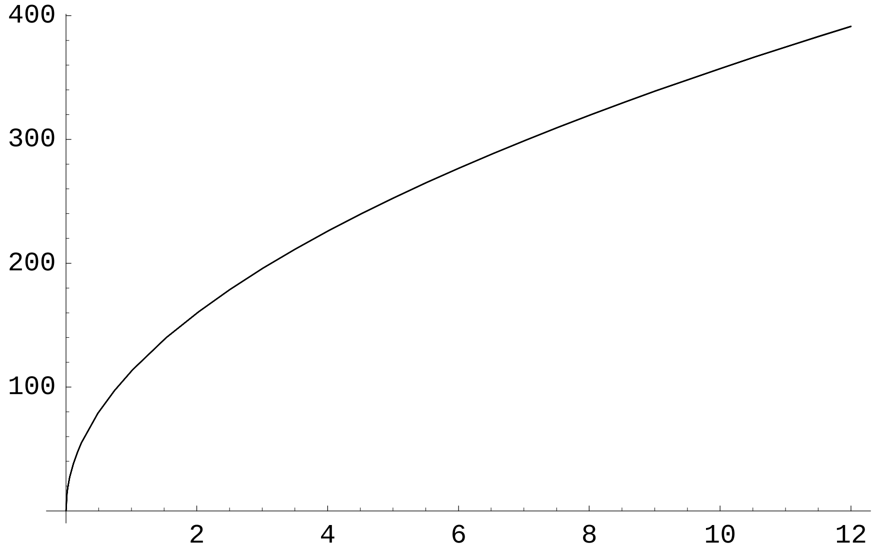
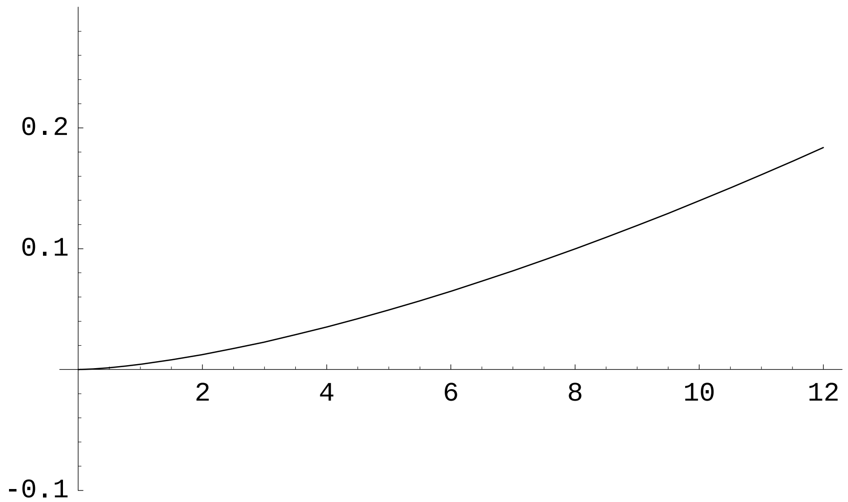



Schaubild der Differenz in Abhängigkeit von $h$:

```
Plot[SwExakt[h] - SwApprox[h], {h, 0, 12}, PlotRange → {-0.1, 0.3}];
```




## Zur Übung

Wie kann man das Modell (zumindest theoretisch!) dazu verwenden, den Erdumfang durch Beobachtung zu ermitteln?

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-03-29

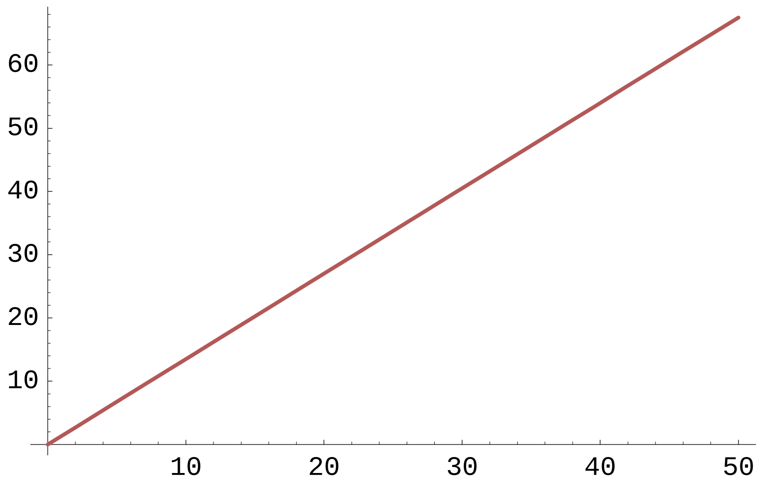
# Funktionen als Modellbausteine

Funktionen $f$ (bzw. Funktionsgleichungen $y = f(x)$) drücken die Abhängigkeit einer Größe (Variable $y$) von einer anderen Größe (Variable $x$) aus. Das macht sie zu "natürlichen" Bausteinen der Modellbildung.

## Beispiel 1

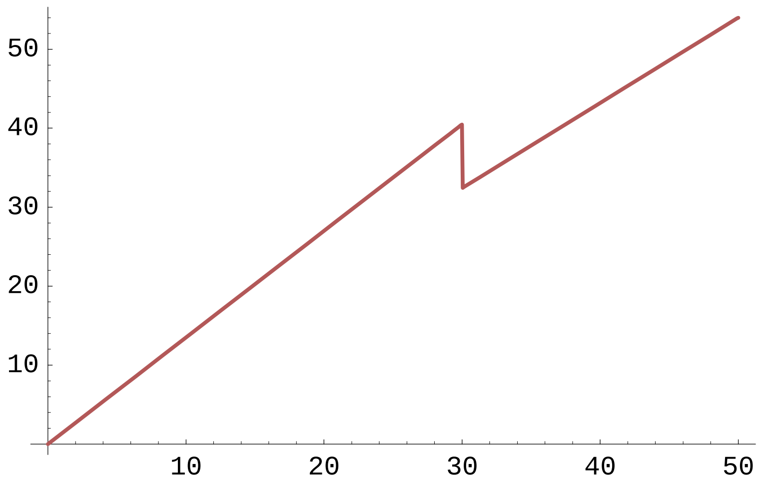
1 ME (Mengeneinheit) einer Reinigungsflüssigkeit kostet 1.35 €. Innerhalb gewisser Grenzen ist der Preis von $x$ ME (linear) proportional zur gekauften Menge $x$, hier ausgedrückt durch die Funktion:

$$\text{Preis}(x) = 1.35\,x$$

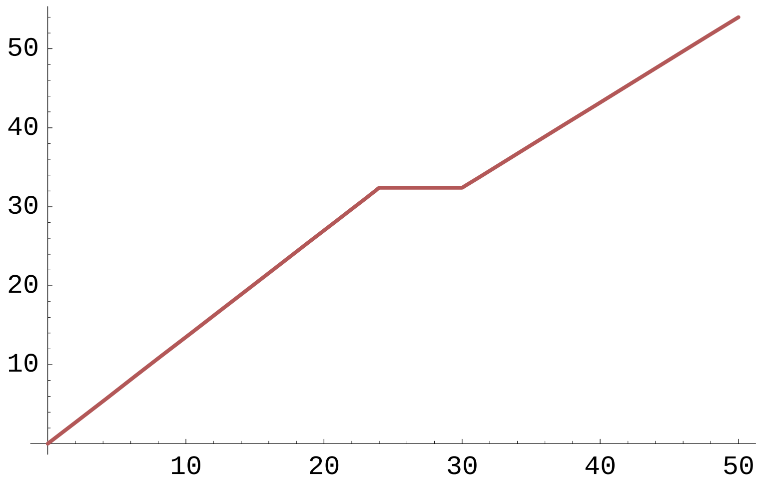



Bei einer Abnahme von mind. 30 ME gibt es 20 % Rabatt:

$$\text{Preis}(x) = 1.08\,x \text{ für } x \geq 30$$




Danach werden 24 ME zum selben Preis angeboten wie 30 ME. Soll die Preisfunktion monoton sein, kann sie wie folgt "korrigiert" werden:




## Beispiel 2

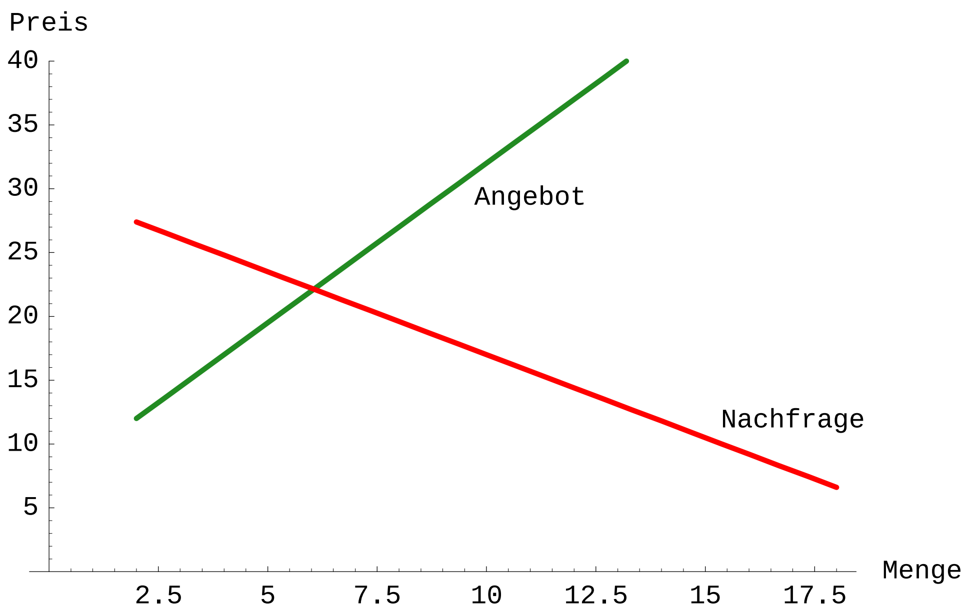
Preisbildung durch Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage:

Angebotsfunktion: $f(x) = 2.5\,x + 7$

Nachfragefunktion: $g(x) = -\,1.3\,x + 30$

$f, g$ werden in einem Intervall $m_1 \leq x \leq m_2$ als linear und monoton (wachsend bzw. fallend) angenommen, z.B. $m_1 = 2$, $m_2 = 18$.

```
f[x_] := 2.5 x + 7;
g[x_] := -1.3 x + 30;
```




## ■ Erläuterung

Angebotskurve: Anbieter produziert umso mehr, je höher der Preis ist, den er mit seiner Ware erzielen kann.

Nachfragekurve: Käufer bzw. Konsument erwirbt umso mehr, je niedriger der Preis ist.

## ■ Preisermittlung im Modell

Bei welchem Preis $p_0$ stimmen Angebot und Nachfrage überein?

Welche Angebotsmenge $x_0$ kann vollständig umgesetzt werden?

Grafische Lösung: $x_0 \approx 6$, $p_0 \approx 22$

Rechnerische Lösung: lineare Glg. $f(x) = g(x)$ nach $x$ auflösen!

```
{6.05263, 22.1316}
```

# Modellarten nach Gegenstand und Zweck

## Gegenstandsabhängige Kennzeichnung

Bestimmte Charakteristika eines Modells hängen vom "Was" der Anwendung, d.h. vom Gegenstand (Sachkomplex) der Modellierung ab. Zu den wichtigsten Modellkennzeichnungen gehören die folgenden Gegensatzpaare:

| | | |
|---|---|---|
| 1. diskret | $\longleftrightarrow$ | kontinuierlich |
| 2. statisch | $\longleftrightarrow$ | dynamisch |
| 3. deterministisch | $\longleftrightarrow$ | stochastisch |

### ■ Erläuterungen

1. Ein diskretes Modell ist aus abgegrenzten Einheiten aufgebaut. Eine Bewegung verläuft kontinuierlich. Wird sie gefilmt, so entsteht eine (diskrete) Folge von Einzelbildern.

2. Dynamische Modelle beschreiben Veränderungen in Zeit und Raum durch eine Folge von Zuständen. Für die Abbildung einer Einzelsituation genügt ein statisches Modell.

3. Ein (dynamisches) Modell heißt deterministisch, wenn die Folge seiner Zustände (kausal und/oder algorithmisch) eindeutig festgelegt ist. Im Unterschied dazu schließen stochastische Modellierungen zufällige Veränderungen ausdrücklich mit ein.

## Zweckabhängige Kennzeichnung

Das "Wozu" einer Anwendung, der Zweck, der mit einer Modellbildung verfolgt wird, hat einen maßgeblichen Einfluss auf das Modell bzw. die Art, in der es den Sachkomplex abbildet. Bei H. Bossel [*Modellbildung und Simulation*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 1992, S. 28] heißt es dazu:

> "*Der Modellzweck ist ... die wichtigste Vorgabe der Modellentwicklung. Je genauer er spezifiziert wird, desto schärfer, präziser und knapper kann die Modellformulierung entwickelt werden. Die präzise Formulierung des Modellzwecks gehört daher an den Beginn der Modellentwicklung; auf sie muß einige Sorgfalt verwendet werden.*"

(Wenn z.B. ein Zimmer tapeziert werden soll, so wird zu diesem Zweck die Wandfläche keineswegs bis auf den Quadratzentimeter genau vermessen und berechnet, um anschließend exakt die diesem Quantum entsprechende Tapetenmenge zu bestellen.)

Ihrem Zweck nach lassen sich

1. präskriptive
2. deskriptive
3. explikative

Modellierungen unterscheiden (nicht immer säuberlich zu trennen).

## ■ Erläuterungen

1. *Präskriptiv* bedeutet, dass wir dem Modell eine *Vorschrift* (oder *Hilfe*) für unser Handeln und Entscheiden entnehmen wollen (Vorbildfunktion). Viele Modellierungen in Technik und Architektur sind präskriptiv (z.B. entwickelt ein Architekt das Modell eines Gebäudes vor und als Anweisung zu dessen Errichtung).

2. *Deskriptive* Modelle sollen in erster Linie eine brauchbare Beschreibung ihres Sachkomplexes liefern (Abbildfunktion, auch Simulationsfunktion). Darüber, was jeweils "brauchbar" bedeutet, entscheidet der Zweck bzw. Verwendungszusammenhang.

3. *Explikative* Modelle zielen auf eine Erklärung, suchen nach einer Antwort auf die Frage, warum ein Sachkomplex so und so beschaffen ist und seine Elemente sich so oder so verhalten. Das Verhalten wird nicht nur beschrieben, sondern anhand von inneren Strukturmerkmalen und Ursache-Wirkungs-Beziehungen als notwendig ablaufender Vorgang nachvollzogen. (Zum Beispiel ist ein Modell des Regenbogens danach zu bewerten, wieweit er die Entstehung von Form, Größe und Farbenfolge des Phänomens verständlich macht.) Neben den kausal-explikativen Gesichtspunkt tritt häufig auch eine *prognostische* Funktion. Zum Beispiel erlaubt es ein (brauchbares) Modell des Planetensystems, aus einer bekannten Konstellation die Positionen der Himmelskörper in der Zukunft vorauszusagen.

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-03-27

## Bewertung von Modellen (Validierung)

Modelle sind durch Vereinfachung und Abstraktion entstandene Abbilder realer Sachkomplexe. Sie werden zu bestimmten Zwecken entwickelt. Daraus ergibt sich am Ende die Notwendigkeit, Modell und Original gegenüberzustellen. Welche Punkte dabei im Detail zu untersuchen sind, hängt vom jeweiligen Fall ab. Es lassen sich dennoch einige allgemeine Kriterien angeben, welche die *Validität* (*Gültigkeit*) eines Modells stützen können.

Vorab ist ein methodologischer Grundsatz herauszustellen: Es kann nicht darum gehen, die "Richtigkeit" eines Modells ein für alle Mal zu *beweisen*. Zum einen reicht das Beweisen, wie wir es aus der Mathematik kennen, gar nicht in die Erfahrungswelt hinein. Zum anderen verlangt der Anwendungskontext einer Modellbildung meistens weniger. Um ein Modell als valide zu bestätigen, sollte man es *belasten*. Eine Belastungsprüfung ist -- zugespitzt gesagt -- der Versuch, ein Modell in der einen oder anderen Hinsicht zum Scheitern zu bringen. Dies ist der Inhalt des sog. *Falsifikationsprinzips* (von K. Popper in seiner *Logik der Forschung* aufgestellt). Ein Modell, das eine Reihe von Falsifikationsversuchen überstanden hat, erlangt damit eine provisorische Gültigkeit.

Nach Bossel [*Modellbildung und Simulation*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 1992, S. 36] lassen sich vier zentrale Bereiche für die kritische Befragung eines Modells ausmachen:

**Verhaltensgültigkeit**

(falls das Verhalten eines Systems beschrieben wird): Stimmt das Verhalten des Modells mit dem Verhalten des modellierten Systems (unter gleichen oder analogen Bedingungen) qualitativ soweit überein, wie es der Modellzweck verlangt?

**Strukturgültigkeit**

Gibt das Modell die innere Struktur des Sachkomplexes, d.h. die funktionalen und kausalen Beziehungen seiner Bestandteile, im wesentlichen (im Rahmen des Modellzwecks angenähert) richtig wieder?

**Empirische Gültigkeit**

Stimmen die Ausgabedaten, insbesondere durch das Modell vorhergesagte Ergebnisse, im Bereich des Modellzwecks mit den entsprechenden Werten aus dem Erfahrungskontext überein? Für den Fall, dass Beobachtungen fehlen, sollten sie zumindest konsistent und plausibel sein.

**Anwendungsgültigkeit**

Lässt sich das Modell tatsächlich so anwenden, dass der ursprüngliche Zweck der Modellbildung erfüllt ist?

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-03-29

# Ein Modell für Wachstum

Der Bestand $x$ einer Bakterienpopulation wird alle 24 Stunden gemessen. Bei kleiner bis mittelgroßer Populationsdichte ergibt sich ein Wachstum von 5 Prozent zwischen zwei Messungen (1 Periode).

## Entwicklung eines diskreten dynamischen Modells

Anfangsbestand: $x_0$

Bestand nach 1 Periode: $x_1 = x_0 + 0.05\, x_0 = 1.05\, x_0$

Die Differenz $x_1 - x_0$ heißt *Zuwachs*, das Verhältnis $q := \frac{x_1}{x_0}$ *Wachstumsfaktor*, $r := q - 1$ *Wachstumsrate*.

Im Gültigkeitsbereich erhält man die Bestandsfolge:

$$
\begin{aligned}
&x_0\\
&x_1 = x_0\, q\\
&x_2 = x_1\, q\\
&\ \ldots\\
&x_n = x_{n-1}\, q\\
&\ \ldots
\end{aligned}
$$

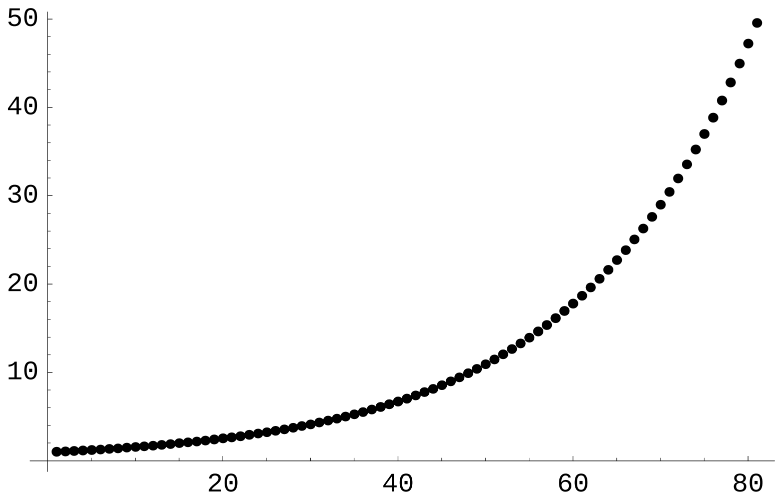
Es gilt: $x_n = x_0\, q^n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ (sog. *geometrische Folge*).

Der Quotient aufeinanderfolgender Glieder ist konstant ( $= q$ ).

$q > 1$: Wachstum (im engeren Sinn)

$q < 1$: Zerfall ("negatives Wachstum" wegen $r < 0$)

$q = 1$: konstante (stationäre) Folge ("Nullwachstum" wegen $r = 0$)




Das Verhalten der Bestandsfolge $(x_n)$ ist im wesentlichen durch $q^n$ bestimmt. Es zeigt sog. *exponentielles Wachstum*.

Auf lange Sicht ($q > 1$, mit größer werdendem $n$) wächst $q^n$ über alle Grenzen ($q^n \to \infty$ für $n \to \infty$). Für die Sachsituation (Bakterienkultur) ist dies natürlich unrealistisch.

### ■ Verdopplungszeit, Halbwertszeit

Wann wird $x_n \geq 2\, x_0$?

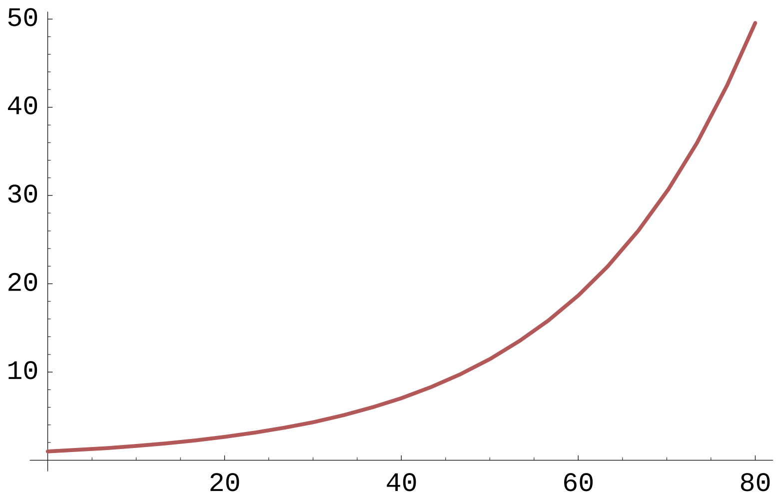
Sei $d$ das kleinste $n$, das diese Ungleichung erfüllt; $d$ heißt *Verdopplungszeit*. Entsprechend ist bei Zerfallsvorgängen eine *Halbwertszeit* $h$ definiert als kleinstes $n$, für das gilt: $x_n \leq \frac{1}{2}\, x_0$.

Für kleine (positive) Wachstumsraten $r$ (bis 10 %) gilt:

$$r \cdot d \approx 0.7$$

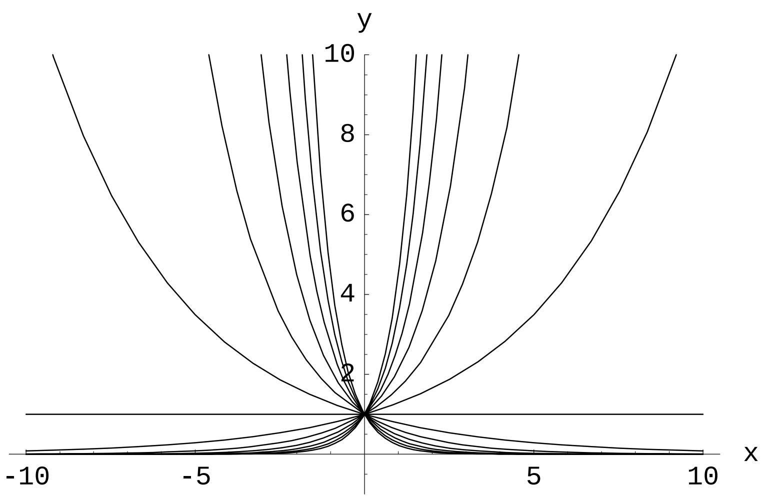
## Die Exponentialfunktion als Modell stetigen Wachstums

Die geometrische Folge $q^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) hat als kontinuierliche Entsprechung die allgemeine Exponentialfunktion $y = q^x$ ($x$ reelle Zahl).




Wegen $q = e^{\log q}$ hat man: $q^x = e^{x \log q}$, wobei log der natürliche Logarithmus (zur Basis $e = 2.71828...$). Die allgemeine Exponentialfunktion kann somit in der Form $y = e^{a\,x}$ geschrieben werden; dabei ist $q = e^a$.

Darstellung der Funktionsschar $y = e^{a\,x}$ für $-1.5 \leq a \leq 1.5$:



© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-03-30

# Modell für ein Konto

## Ausgangsproblem

Frau Meier hat auf ihrem Sparkonto ein Guthaben von 3000 €. An jedem Jahresende zahlt sie 400 € ein.

Wie lautet der Kontostand nach Ablauf von 1, 2, 3, usw. Jahren?

### ■ Ein Modell dieser Situation

sollte allgemein sein (d.h. anwendbar auf ähnliche Beispiele mit anderen Zahlenwerten)

sollte einfach sein (hier: keine anderen Zahlungen berücksichtigen und von einem festen Zinssatz ausgehen)

Gesucht: eine Formel für die Folge der Kontostände $x_0$, $x_1$, $x_2$, ...

## Entwicklung eines (diskreten dynamischen) Modells

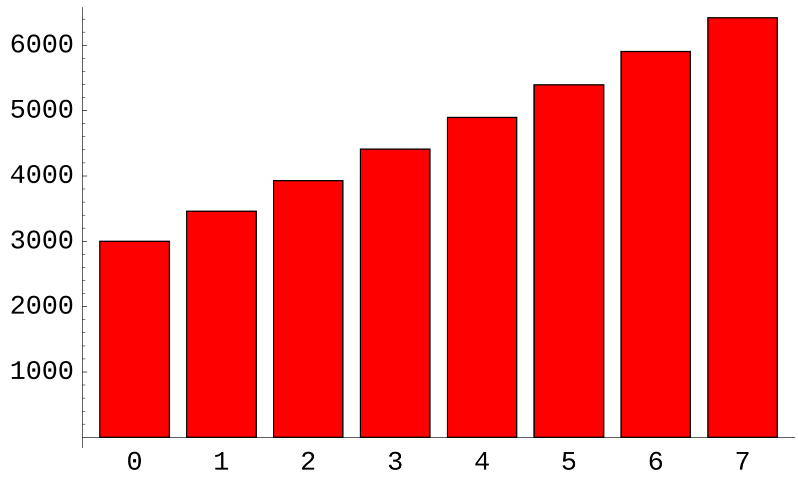
Der Einzahlungsbetrag am Ende der Zinsperiode werde mit $b$ bezeichnet.

(Es ist laut Aufgabe $b > 0$. Das Modell sollte aber auch für $b < 0$ und $b = 0$ funktionieren und sinnvolle Ergebnisse liefern.)

Der Prozentsatz, zu dem das Kapital in einer Periode (Jahr) verzinst wird, werde mit $p$ bezeichnet (d.h. $r = \frac{p}{100}$ ist die zugehörige *Wachstumsrate*).

Wir wollen das Konto über 7 Jahre mit einem Zinssatz von 2 % fortschreiben:

```
3000.00
3460.00
3929.20
4407.78
4895.94
5393.86
5901.74
6419.77
```




Die ersten 3 Rechenschritte (bei Anfangskapital $x_0$):

$x_0$

$1.02\,x_0 + 400$

$1.02\,(1.02\,x_0 + 400) + 400$

$1.02\,(1.02\,(1.02\,x_0 + 400) + 400) + 400$

Allgemein:

Der Kontostand $x_{n+1}$ geht aus dem des Vorjahres, $x_n$, wie folgt hervor:

$$x_{n+1} = a\,x_n + b$$

Dabei ist $a = 1 + \frac{p}{100}$ der *Wachstumsfaktor* (Zinsfaktor) zum Zinssatz $p$.

Bei $n = 0$ beginnend ergibt sich:

$x_1 = a\,x_0 + b$

$x_2 = a^2\,x_0 + a\,b + b$

$x_3 = a^3\,x_0 + a^2\,b + a\,b + b$

usw.

Offenbar hat $x_n$ als ersten Summanden $a^n\,x_0$.

Die übrigen Summanden haben den Faktor $b$ gemeinsam, sodass sich insgesamt die Formel vermuten lässt:

$$x_n = a^n\,x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

In der Klammer des zweiten Summanden steht eine *geometrische Reihe*, die für $a \neq 1$ aufsummiert werden kann:

$$x_n = a^n\,x_0 + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Für $a = 1$ (d.h. $p = 0$) ergibt sich:

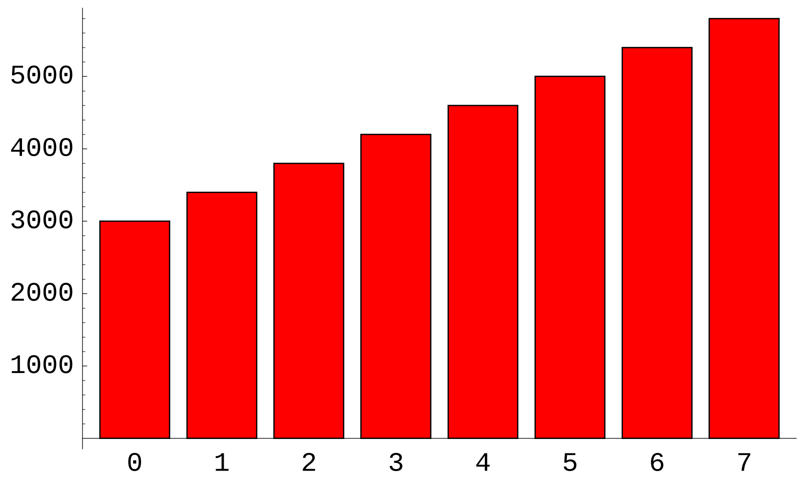
$$x_n = x_0 + b\,n$$

Zusammen liefert dies die *Modellgleichung(en) für den Kontostand* nach $n$ Perioden.

## ■ Anmerkung

Für $a = 1$ ist $x_n$ eine *arithmetische Folge*.

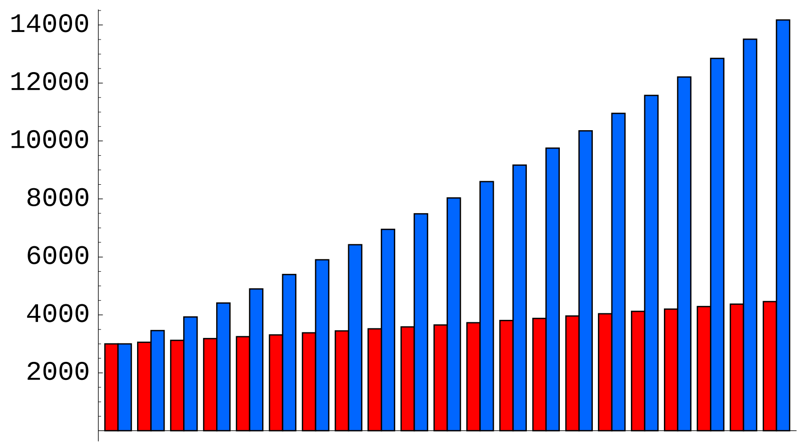
Das Kapital vermehrt/vermindert sich (zinslos) durch wiederholte Addition/Subtraktion eines festen Betrags.




Für $b = 0$ ist $x_n$ eine *geometrische Folge*

(Modell des exponentiellen Wachstums/Zerfalls).

Vergleich der Wachstumsverläufe bei $b = 0$ und $b = 400$ über 20 Perioden:



# Das allgemeine lineare Modell

Der Begriff des allgemeinen linearen Modells (ALM) umfasst die diskreten dynamischen Modelle, deren Zustände $x_0, x_1, x_2, \ldots$ durch *Iteration* (wiederholte Anwendung) *einer linearen Funktion* (sog. *Übergangsfunktion*) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugt werden:

> $F(x) = a\,x + b$
>
> $a, b$ beliebige reelle Zahlen (Modellparameter)

Die Zustände $x_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ entstehen wie folgt:

$x_0$ Anfangszustand

$x_1 = F(x_0)$

$x_2 = F(x_1) = F(F(x_0)) = F^2(x_0)$

$x_3 = F(x_2) = F(F^2(x_0)) = F^3(x_0)$

usf.

<u>Allgemein:</u> $x_{n+1} = F(x_n) = a\,x_n + b$

Die allgemeine Lösung $x_n = F^n(x_0)$ lautet:

$$x_n = a^n\,x_0 + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad \text{falls } a \neq 1$$
$$x_n = x_0 + n\,b, \quad \text{falls } a = 1$$

$F$ besitzt (höchstens) einen Fixpunkt $\overline{x}$ mit $F(\overline{x}) = \overline{x}$.

Der Fixpunkt ist Schnittpunkt der beiden Geraden $y = a\,x + b$ und $y = x$.

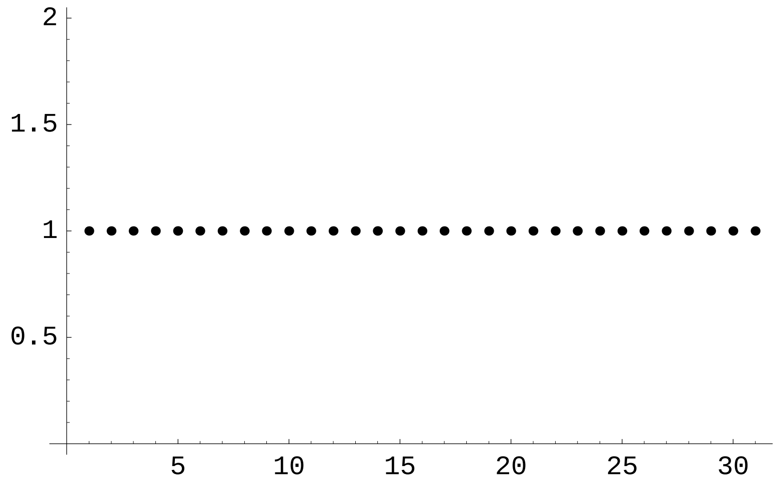
Durch Lösen der Gleichung $x = a\,x + b$ ergibt sich: $\overline{x} = -\frac{b}{a-1}$ $(a \neq 1)$.

Im Fall $a \neq 1$ lässt sich $x_n$ damit in einer sog. *Fixpunktform* schreiben (Beweis: direktes Einsetzen).

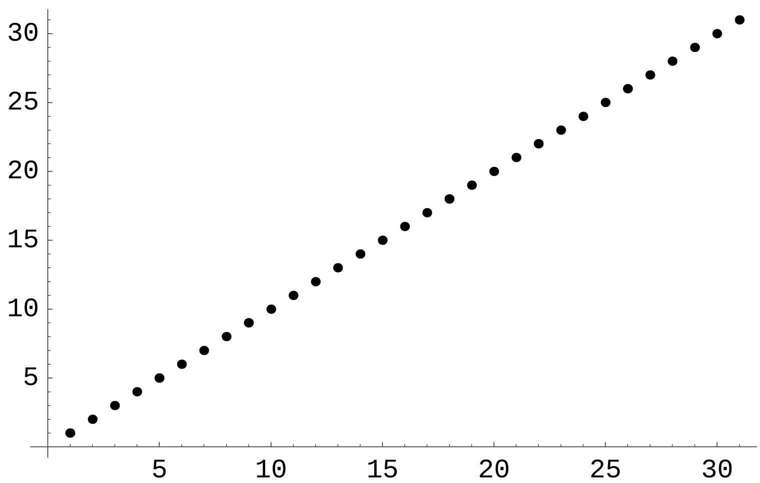
$$x_n = F^n(x_0) = a^n(x_0 - \overline{x}) + \overline{x}$$

## ■ Diskussion der möglichen Fälle

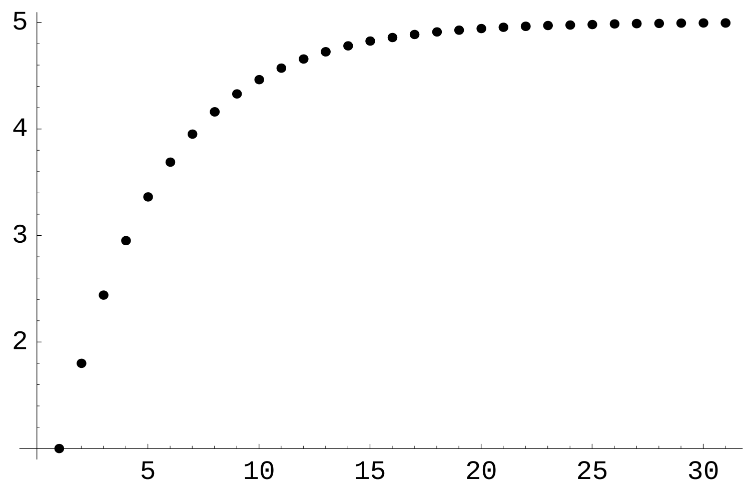
**Fall 1.** $a = 0$: konstante Folge $x_n = b$.



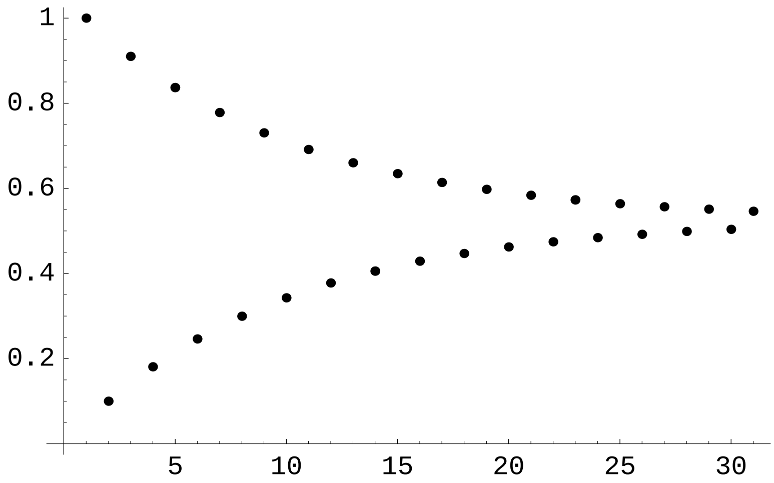

**Fall 2.** $a = 1$: lineares Wachstum; $x_n$ ist eine arithmetische Folge (schließt auch den Fall $b < 0$ ein, bei dem die Folge abnimmt).



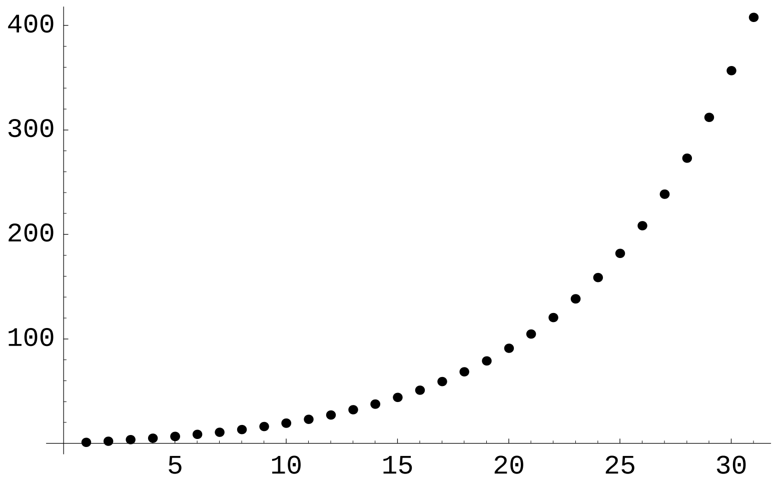

**Fall 3.** $0 < a < 1$: $\overline{x}$ ist stabil, d.h. $x_n \longrightarrow \overline{x}$ für $n \longrightarrow \infty$.



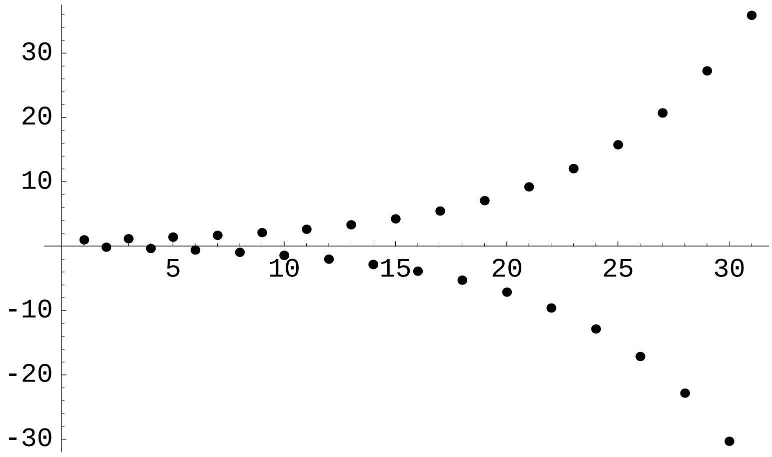
**Fall 4.** $-1 < a < 0$: gedämpfte Schwingung, sonst wie Fall 3.



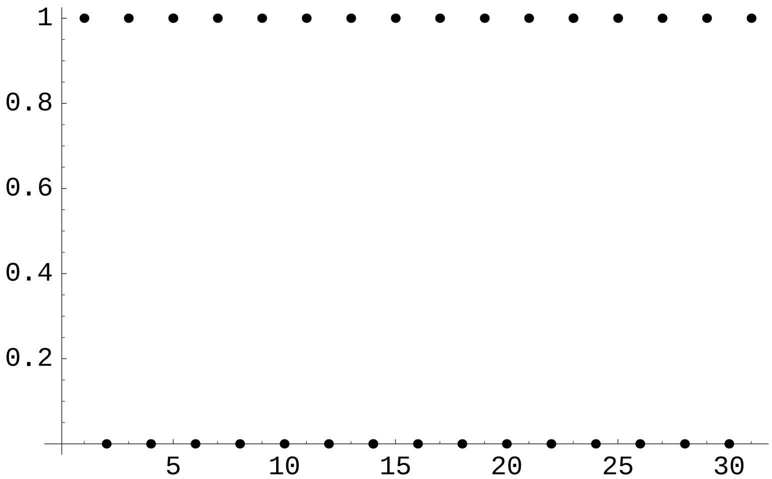

**Fall 5.** $a > 1$: $\overline{x}$ ist instabil (abstoßender Fixpunkt); je nach Vorzeichen von $x_0 - \overline{x}$ ist $x_n$ eine exponentiell wachsende oder fallende Folge.




**Fall 6.** $a < -1$: wie Fall 5, es resultiert jedoch eine Schwingung mit wachsender Amplitude.




**Fall 7.** $a = -1$: $x_n = x_0$ ($n$ gerade), $x_n = b - x_0 = 2\,\overline{x} - x_0$ ($n$ ungerade). Es liegt ein Zyklus der Länge 2 vor.



© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-01

# Finanzmathematische Grundaufgaben

## Regelmäßig wiederkehrende Zahlungen

Im Wirtschaftsleben spielen regelmäßig wiederkehrende Zahlungen (sog. *Renten*) eine große Rolle, z.B.

- Kapitalisierung von Renten
- Mietzahlungen für eine Immobilie
- Leasing
- Tilgung von Krediten
- Annuitäten (Renten bei bekanntem Endwert)

etc.

Das allgemeine lineare Modell lässt sich auf diese Situationen anwenden.

Wir spezifizieren (im Sinne des ALM):

| | |
|---|---|
| $x$ | Geldbetrag, Kapital |
| $b$ | regelmäßig gezahlter Betrag (Rente) |
| $a$ | Zinsfaktor, genauer: $a = 1 + r$, |
| | wobei $r = \frac{p}{100}$ und $p$ der in % angegebene Zinssatz |

Es ist $a > 1$ (wegen $p > 0$) und daher $\overline{x} = -\frac{b}{a-1} = -\frac{b}{r}$ ein abstoßender Fixpunkt. Die Gleichung

$$\overline{x} \cdot r = -b$$

drückt die *Reziprozität von Kapital und Zins* aus ("Kapital × Zins = Rente").

Die bekannte Lösung des ALM liefert unmittelbar die *finanzmathematische Grundgleichung*:

$$x_n = x_0 \cdot (1 + r)^n + b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

## Sechs Grundaufgaben

In dieser Gleichung stecken 6 Sonderfälle, die in der Praxis häufig vorkommen. Jeder Fall entsteht dadurch, dass von den drei Größen $x_0$, $x_n$, $b$ jeweils eine Null gesetzt, eine als gegeben angenommen und die dritte gesucht wird:

**Fall I.** Endwert einer reinen Rente: $x_0 = 0$, $b$ gegeben, $x_n$ gesucht

$$x_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

**Fall II.** Endkapital bei kumulativer Verzinsung: $b = 0$, $x_0$ gegeben, $x_n$ gesucht

Dieser Sonderfall beinhaltet die einfache Zinseszinsrechnung nach dem Muster des exponentiellen Wachstums:

$$x_n = x_0\, a^n = x_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,\ x_0 \text{ Anfangskapital}$$

**Fall III.** Barwert einer reinen Rente: $x_n = 0$, $b$ gegeben, $x_0$ gesucht

$$x_0 = -b\, \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n\, r}$$

**Fall IV.** Annuität bei bekanntem Rentenendwert: $x_0 = 0$, $x_n$ gegeben, $x_0$ gesucht

**Fall V.** Tilgungsrate eines Kredits ($b < 0$, $x_0 > 0$) oder Rente aus Kapital ($b > 0$, $x_0 < 0$): $x_n = 0$, $x_0$ gegeben, $b$ gesucht

**Fall VI.** Barwert eines Kapitals: $b = 0$, $x_n$ gegeben, $x_0$ gesucht

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-02

# Marktpreisbildung im Spinnweb-Modell

Der Preis für eine Ware kommt auf einem "idealen Markt" dadurch zustande, dass Angebot und Nachfrage sich die Waage halten. Der Begriff *Marktpreis* bezeichnet somit einen Gleichgewichtszustand.

## ■ Modellbildung

Es werden drei Größen zum Zeitpunkt $n$ betrachtet:

$x_n$ : Nachfrage,

$y_n$ : Angebot,

$z_n$ : Preis.

Sie sind untereinander durch drei Systemgleichungen verbunden:

$$x_n = p + q\, z_n$$

(Nachfrage: reagiert direkt auf den Preis)

$$y_n = r + s\, z_{n-1}$$

(Angebot: produktionsbedingte verzögerte Reaktion des Anbieters auf erzielbare Preise in der jeweiligen Vorperiode)

$$x_n = y_n$$

(Gleichgewicht von Nachfrage und Angebot)

Aus der dritten Gleichung folgt: $p + q\, z_n = r + s\, z_{n-1}$.

Auflösung nach $z_n$ liefert eine Gleichung, die sich dem ALM unterordnet:

$$z_n = \left(\frac{s}{q}\right) z_{n-1} + \frac{r-p}{q}$$

Modellparameter des ALM: $a = \frac{s}{q}$, $b = \frac{r-p}{q}$, wobei $q \neq 0$.

Fixpunkt: $\bar{z} = -\frac{b}{a-1} = \frac{r-p}{q-s}$

Der Marktpreis $z_n$ ergibt sich direkt aus der Fixpunktform:

$$z_n = \left(\frac{s}{q}\right)^n \left(z_0 - \frac{r-p}{q-s}\right) + \frac{r-p}{q-s}$$

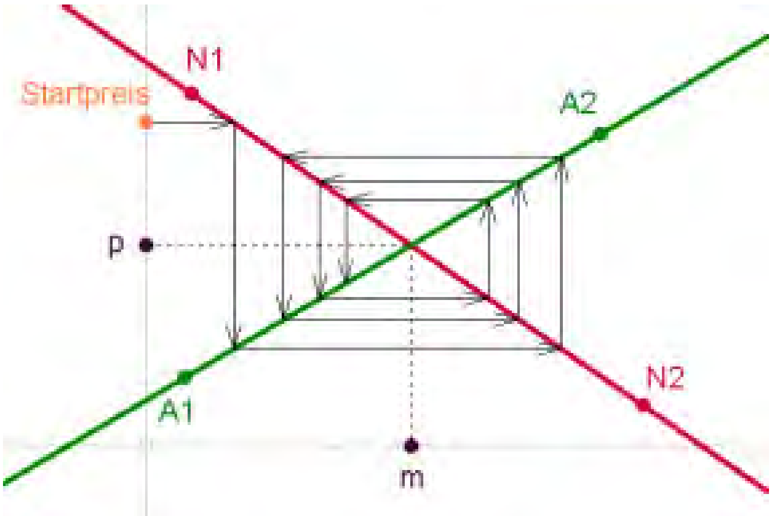
<u>Diskussion der Modellparameter:</u> direkt aus den Falldarstellungen zum ALM zu übernehmen

Wegen ihrer Bedeutung seien drei dieser Fälle erwähnt:

**Fälle 3 und 4**: $\left|\frac{s}{q}\right| < 1,\, s \neq 0.$

Die Preisentwicklung stabilisiert sich um einen Marktpreis (Fixpunkt) $\bar{z} = \frac{r-p}{q-s}$ und löst die Nachfrage- und Angebotsmengen $\bar{x} = p + q\,\bar{z}$ bzw. $\bar{y} = r + s\,\bar{z}$ aus.

Das Zustandsdiagramm des Modells erinnert an ein Spinngewebe (engl. *cobweb model*).




**Fall 7**: $s = -q$.

Das System springt zwischen zwei Werten hin und her.

Eine bekannte empirische Bestätigung dieses Phänomens liefert der von A. Hanau 1928/30 entdeckte sog. *Schweinezyklus*.